Я. Абрамов представляет:
Игры разума с биномиальными коэффициентами

В этой игре ставка больше,
чем просто рассудок.

1. $^{\oplus}$Докажите, что числа $(a+1)^{a^n}-1$ и $(1-a)^{a^n}-1$ делятся на a^{n+1} и не делятся на a^{n+2}.

Определение 1. *Определим функцию Мёбиуса как*

$$\mu(n)=\begin{cases}0, & \text{если существует } x>1, \text{такой что } x^2\mid n\\ \\ (-1)^\alpha, & \text{в ином случае, где } \alpha\text{ — }\\ & \text{количество простых делителей числа } n.\end{cases}$$

2. а$^{\oplus}$)Найдите $\sum\limits_{d|n}\mu(d)$ (сумму по всем делителям числа n).
б$^{\otimes}$)Положим $K_n=\sum\limits_{d|n}\binom{2d}{d}$. Докажите, что $\binom{2n}{n}=\sum\limits_{d|n}\mu(\frac{n}{d})K_d$.

3. Пусть p — простое число. Докажите, что
а$^{\oplus}$) при $1\leqslant k\leqslant p-1$ число $\binom{p}{k}$ делится на p;
б$^{\oplus}$) при $1\leqslant m\leqslant p-k$ число $(-1)^m\binom{p-k}{m}-\binom{k+m-1}{m}$ делится на p;
в$^{\otimes}$) $\binom{np}{n}\equiv np\ (mod\ p^2)$;
г$^{\otimes}$) $\binom{a_0+a_1p+\ldots+a_np^n}{b_0+b_1p+\ldots+b_np^n}\equiv\binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1}\ldots\binom{a_n}{b_n}\ (mod\ p)$;
д$^{\otimes}$) если p^l делит $\binom{n}{k}$, то $p^l\leqslant n$;
е$^{\otimes}$) если p — нечетно, $n=p^{l-2}$, где $l\geqslant 2$, то если $m\geqslant 2$, $\binom{n}{m}$ делится на p^{l-m};
ё$^{\otimes}$) если $p>3$, то $\binom{2p-1}{p}\equiv 1\ (mod\ p^3)$.

Определение 2. *Обозначим через* $\mathfrak{p}_m(q)$ *многочлен* $q^{m-1}+\ldots+q+1$. *Тогда q-биномиальным коэффициентом* $\binom{n}{m}_q$ *называется число*

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\mathfrak{p}_k(q)}{\prod\limits_{k=1}^{m}\mathfrak{p}_k(q)\prod\limits_{k=1}^{n-m}\mathfrak{p}_k(q)}=\frac{\mathfrak{p}_n(q)\ldots\mathfrak{p}_2(q)\mathfrak{p}_1(q)}{\mathfrak{p}_m(q)\ldots\mathfrak{p}_2(q)\mathfrak{p}_1(q)\ \mathfrak{p}_{n-m}(q)\ldots\mathfrak{p}_2(q)\mathfrak{p}_1(q)},$$

где $q\neq-1$ (хотя доопределить можно и для него: см. след. задачу).

4. $^{*\oplus}$)Докажите, что $\binom{n}{m}_q$ — многочлен от q с целыми коэффициентами.

$\oplus$ — устная задача,
$\otimes$ — письменная