ТЕОРЕМА СОНДА

Определение 1. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ называются *перспективными*, если прямые A_1A_2, B_1B_2, и C_1C_2 пересекаются в одной точке, которая называется *центром перспективы.*

1. **Теорема Дезарга.** Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективны тогда и только тогда, когда точки пересечения их соответствующих сторон (A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2) лежат на одной прямой. Эта прямая называется *осью перспективы.*

Определение 2. Треугольник $A_2B_2C_2$ называется ортологичным треугольнику $A_1B_1C_1$, если перпендикуляры, опущенные из A_1 на B_2C_2, из B_1 на A_2C_2 и из C_1 на A_2B_2 пересекаются в одной точке, которая называется *центром ортологичности.*

2. **Взаимность ортологичности.** Докажите, что, если треугольник $A_2B_2C_2$ ортологичен треугольнику $A_1B_1C_1$, то и $A_1B_1C_1$ ортологичен $A_2B_2C_2$. (Центры ортологичности могут при этом не совпадать).

Теорема Сонда. Пусть P — центр перспективы двух треугольников (не гомотетичных), Q — один из центров ортологичности. Тогда прямая PQ перпендикулярна оси перспективы.

Следствие. Пусть P — центр перспективы двух треугольников, Q_1, Q_2 — их центры ортологичности. Тогда точки P, Q_1, Q_2 лежат на одной прямой.

Основная цель занятия — доказательство теоремы Сонда.

3. **Лемма 1.** На трех прямых a, b, c, проходящих через одну точку, взяты точки A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3. Доказать, что попарные оси перспективы треугольников $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ пересекаются в одной точке.

4. Пользуясь леммой 1, свести общий случай теоремы Сонда к случаю двух треугольников с общей вершиной.

5. **Лемма 2 (Соллертинский).** Пусть дано проективное преобразование f и точка P. Найти геометрическое место точек пересечения прямых l и $f(l)$, где l проходит через P.

6. Докажите, что если два треугольника ортологичны, и центры ортологиности совпадают, то треугольники перспективны.

7. **Лемма 3 (F.Rideau).** Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ ортологичны, Q — точка пересечения перпендикуляров из A, B, C на стороны $A'B'C'$, Q' — точка пересечения перпендикуляров из A', B', C' на стороны ABC. Доказать, что четырехугольники $ABCO$ и $A'B'C'O'$ аффинно эквивалентны.

8. Пусть треугольники ABC и $A'B'C$ ортологичны с центрами Q, Q'; T — точка пересечения AB и $A'B'$. Доказать, что $QQ' \perp CT$.

9. Пусть треугольники ABC и $A'B'C$ ортологичны с центрами Q, Q'; P — точка пересечения AA' и BB'. Доказать, что QQ проходит через P.

10. Доказать теорему Сонда.

11. (Дополнительная задача.) Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны с центром P и ортологичны с центрами Q, Q'. Доказать, что коники $ABCPQ$, $A'B'C'PQ'$ — равносторонние гиперболы с параллельными асимптотами.