Некоторые задачи комбинаторной геометрии

1. (Теорема Сильвестра.) Пусть $A$— конечное множество точек на плоскости, причем не все точки из $A$ лежат на одной прямой. Тогда существует прямая, содержащая ровно две точки из множества $A$.

2. Для любого нечетного натурального $n$ существует множество $A$ точек на плоскости, состоящее из $2n$ точек, такое, что имеется $n$ прямых, содержащих ровно две точки из множества $A$.

Указание. В проективной плоскости рассмотрите вершины правильного $n$-угольника и бесконечно удаленные точки, соответствующие вершинам этого $n$-угольника.

3. Если все попарные расстояния между точками некоторого бесконечного множества на плоскости выражаются целыми числами, то все точки множества ледат на одной прямой.

4. Существует сколь угодно много точек на плоскости с попарно целыми расстояниями, причем никакие три из этих точек не лежат на одной прямой.

Указание. Пусть $\cos\phi = 4/5, \sin\phi = 3/5$. Тогда попарные расстояния между точками $(\cos(2k\phi), \sin(2k\phi))$ рациональны.

5. Не существует четырех точек на плоскости с попарно нечетными расстояниями.

6. а) Максимальное число ребер в графе с $n$ вершинами, не содержащем треугольников, равно $n_1 n_2$, где $n_1 + n_2 = n$, $n_1 \leq n_2 \leq n_1 + 1$.

Указание. Обозначим это максимальное число через $M_n$. Тогда $M_n \leq M_{n-2} + n - 1$.

б) Максимальное число ребер в графе с $n$ вершинами, не содержащем полных подграфов из четырех вершин, равно $n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3$, где $n_1 + n_2 + n_3 = n$, $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_1 + 1$.

7. Пусть $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Тогда найдутся множества $A_1, A_2, A_3$ точек на плоскости мощности $n_1, n_2, n_3$ соответственно такие, что все расстояния между точками множеств $A_i$ и $A_j$, $i < j$, выражаются нечетными числами.

Указание. Пусть $\cos\phi = 1/7, \sin\phi = 2\sqrt{3}/7$. Возьмите

$$A_i = \{(7^n/\sqrt{3})((\cos(2k\phi + 2\pi i/3), \sin(2k\phi + 2\pi i/3)))) : 1 \leq i \leq n_i\},$$

где $n \geq \max(n_1, n_2, n_3))$.

8. Для $n$-точечного множества на плоскости рассмотрим все пары точек из этого множества с нечетными расстояниями. Каково максимально возможное число таких пар?