Здесь собраны разные задачи, которые так или иначе связаны с какими-то логическими вопросами (интересно придумать «строгое доказательство», само утверждение используется в математической логике и др.) — без особенного порядка. Трудность задач может быть самой разной (как и темы) и не обязана возрастать.

Необоснованное усреднение

1. Докажите, что если менее 10% сферы покрашено в чёрный цвет, то можно вписать в неё куб, у которого ни одна вершина не покрашена. (Более лёгкая задача — можно вписать прямоугольный параллелепипед.)

2. На плоскости имеется фигура, площадь которой больше единицы. Докажите, что можно найти вектор с целочисленными координатами, начало и конец которого принадлежат этой фигуре.

Параболы

3. Докажите, что плоскость нельзя покрыть конечным числом внутренностей парабол.

4. Для некоторых значений c и d система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + c \\ x = y^2 + d \end{cases}$$

имеет единственное решение (x_0, y_0). Докажите, что $x_0 y_0 = 1/4$.

Гармонические функции на решётке

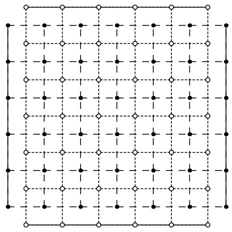
5. Бесконечная клетчатая бумага заполнена числами: в каждой клетке стоит неотрицательное действительное число, причём оно равно среднему арифметическому четырёх соседних чисел. Докажите, что все числа равны. (Для целых чисел это гораздо более простая, но тоже любопытная задача. Хорошего элементарного решения для общего случая я не знаю.)

Ненаглядная геометрия

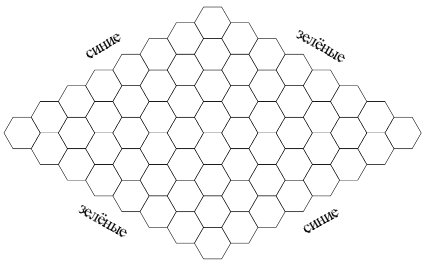
6. Некоторые поля шахматной доски 8×8 объявлены «королевскими», а остальные — «ладейными». Докажите, что либо король может пройти от некоторой клетки первой горизонтали до некоторой клетки последней горизонтали, оставаясь только на королевских полях, либо ладья может пройти от некоторой клетки первой вертикали до некоторой клетки восьмой вертикали, оставаясь только на ладейных полях.

7. Даны две ломаные, лежащие внутри квадрата $ABCD$; одна соединяет вершину A с противоположной вершиной C, другая соединяет B с D. Докажите, что они обязательно пересекаются. (Наглядно это очевидно.)

8. Друг на друга наложены две прямоугольные сетки размера $n \times (n+1)$ (см. рисунок): светлая и тёмная. Из каждой пары пересекающихся (серединами) отрезков длины 1 — светлого и тёмного» — один стёрт, а второй оставлен. Докажите, что либо светлыми линиями можно соединить две короткие стороны светлого прямоугольника, либо тёмными линиями можно соединить две короткие стороны тёмного прямоугольника.



9. Некоторые шестиугольники на рисунке закрашены синим, некоторые — зелёным. Доказать, что либо по синим можно пройти от синей стороны до противоположной, либо по зелёным можно пройти от зелёной стороны до противоположной (но не одновременно).



10. В игре «гекс» игроки (синий и зелёный) по очереди закрашивают по одному шестиугольнику в свой цвет. Когда все шестиугольники закрашены, определяется победитель — тот, кто соединил стороны своего цвета. Докажите, что первый может гарантировать себе выигрыш.

Ненаглядная стереометрия

11. Пакет молока имеет вид прямоугольного параллелепипеда со сторонами 10, 5 и 4 сантиметра. Муха сидит в углу пакета

и хочет переползти в дальний от нее угол. Какова длина самого короткого пути мухи?

Вопросы и ответы

12. Легко отгадать задуманное число от 1 до 1000, задав 10 вопросов (делим пополам и так далее). Как сделать это, если вопросы надо послать по почте списком (не дожидаясь ответов на предыдущие вопросы)?

13. Как сделать это, если можно задать 20 вопросов, но противник имеет право на некоторый вопрос (не более чем на один) ответить неверно?

Последовательности и подслова

14. Некоторые конечные последовательности нулей и единиц (двоичные слова) объявлены *запрещёнными*. При этом известно, что можно написать сколь угодно длинную последовательность нулей и единиц так, чтобы она не содержала запрещённых фрагментов (кусков, подслов). Докажите, что существует бесконечная (и даже бесконечная в обе стороны) последовательность нулей и единиц, не содержащая запрещённых фрагментов.

15. Докажите, что если все запрещённые слова имеют длину 1000 и имеется не более 2^{900} таких слов, то существует бесконечная последовательность, не содержащая запрещённых подслов.

16. В каждой клетке бесконечной клетчатой бумаги надо написать число от 1 до 1000, причём так, чтобы соседние числа (в клетках, имеющих общую сторону) не образовывали запрещённую пару ни в том, ни в другом порядке). Докажите, что если не более чем 1% среди миллиона возможных пар (x, y) запрещены, то такое заполнение существует.

17. Конечные последовательности нулей и единиц (двоичные слова) разбиты на два класса: «синие» и «зелёные». Докажите, что любую бесконечную последовательность нулей и единиц можно разрезать на куски одного цвета.

Правило Тоома

Правило Тоома определяет эволюцию на бесконечной клетчатой бумаге: на следующем шаге клетка живая, если на предыдущем шаге по крайней мере две из трёх клеток — она сама, сосед справа, сосед сверху — были живыми. (Аналогично получается для мёртвых.)

18. Докажите, что если изначально было конечное число живых клеток, то через некоторое время их не останется вовсе.

19. Докажите, что если изначально было N живых клеток, то через N шагов их не останется вовсе.

20. Предположим теперь, что время от времени происходят «чудеса» — в нарушение правила некоторая клетка делается живой. Докажите, что из ничего возникла и в течение N шагов сохранялась жизнь (была хотя бы одна живая клетка), то за это время произошло не менее N чудес.

Линейные уравнения и неравенства

21. Единичный квадрат разрезан на меньшие квадраты. Докажите, что стороны этих меньших квадратов — рациональные числа.

Ассоциативность и её следствия

22. В теории относительности сложение скоростей (в интервале $(-1, 1)$) определяется формулой

$$x \oplus y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Сформулируйте и докажите (строго!) теорему, согласно которой значение суммы $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ не зависит от расстановки скобок.

Рекурсивные определения и доказательства

(Эти задачи на самом деле требуют некоторого уточнения, так что если вам непонятно, что тут спрашивается — не обращайте на них внимания.)

Натуральные числа определим индуктивно: (а) 0 — натуральное число; (б) если x — натуральное число, то Sx (читается «следующий за x») — натуральное число.

23. Определив сложение индуктивно правилами (а) $x + 0 = x$; (б) $x + Sy = S(x + y)$, докажите с помощью рассуждений по индукции, что оно коммутативно и ассоциативно.

24. Дайте индуктивное определение умножения и докажите обычные свойства (коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность).

Торт

25. Надо разрезать торт на минимально возможное число частей так, чтобы его можно было раздать (поровну) 43 гостям, а также 57 гостям, не делая новых разрезов. Сколько нужно частей?