Корни многочленов и их применения.
Основные знания.

Многочленом называется выражение вида $P(x) = a_n x^n + » + a_1 x + a_0$, где n - целое неотрицательное число (степень многочлена), a_0, », a_n - какие-то числа, $a_n \neq 0$.

Комплексным числом называется пара действительных чисел (a, b) с операциями сложения и умножения, определяющимися так: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$; $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Число a называется корнем многочлена если $P(a) = 0$.

(Теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$.

(Следствие). Многочлен $P(x)$ делится на $(x - a)$ тогда и только тогда, когда число a является корнем $P(x)$.

(Основная теорема алгебры). Многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней с учетом кратности. Другими словами он представим в виде $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$ причем единственным образом (с точностью до перестановки сомножителей).

Многочлен $P(x)$ делится на многочлен $G(x)$ тогда и только, тогда когда любой корень многочлена G являются корнем многочлена P, причем не меньшей кратности.

Корни наибольшего общего делителя многочленов $P(x)$ и $G(x)$ - это общие корни многочленов $P(x)$ и $G(x)$ (с кратностью равной минимуму из кратностей в многочленах P и Q).

Многочлен с действительными коэффициентами представим в виде $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)(x^2 + b_1 x + c_1)(x^2 + b_2 x + c_2)\ldots(x^2 + b_l x + c_l)$, где $x_1, \ldots x_m$ действительные корни многочлена P(x), а многочлены $x^2 + b_1 x + c_1, x^2 + b_2 x + c_2, \ldots, x^2 + b_l x + c_l$ не имеют действительных корней

(Теорема Виета). Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + » + a_1 x + a_0$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда справедливы равенства.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_{n-1}/a_n \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = a_{n-2}/a_n \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -a_{n-3}/a_n \\ \ldots\ldots \\ x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n a_0/a_n. \end{cases}$$

Верна и обратная теорема.

Задачи.

1. Известно, что многочлен $x^n + x + 1$ делится на многочлен $x^2 + x + 1$. Докажите, что $n = 3k + 2$.

2. Найдите НОД $(x^n - 1, x^m - 1)$

3. Докажите, что многочлен $x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + x^{6666} + x^{5555} + x^{4444} + x^{3333} + x^{2222} + x^{1111} + 1$ делится на многочлен $x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x^1 + 1$.

4. Пусть многочлены $P(x)$, $Q(x)$, $R(X)$ и $S(x)$ удовлетворяют следующему тождеству $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2 R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$. Докажите, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $(x - 1)$.

5. Докажите, что многочлен $P(x)$ принимает неотрицательные значения, при всех действительных x, тогда и только тогда когда он представим в виде суммы квадратов других многочленов с действительными коэффициентами.

6. Пусть многочлен $P(x) > 0$, при $x > 0$. Докажите, что существует такие многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с неотрицательными коэффициентами, что $P = Q/R$.

7. Найдите НОД $(x^n + 1, x^m + 1)$