Неравенства симметрические и циклические.

Основные знания.

Все неравенства обсуждаются только для положительных чисел.

Неравенство вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ называется симметрическим, если оно не меняется при любой перестановке переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Неравенство вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ называется циклическим, если оно не меняется при циклической перестановке переменных (которая x_1 переводит в x_2, x_2 в x_3, x_3 в x_4, ..., x_n в x_1).

Неравенство Коши между средним арифметическим и геометрическим. $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Равенство достигается только если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

Неравенство Мюрхеда.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2$

Весовое неравенство Коши. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ - положительные вещественные числа.

$$\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \geq (a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1+m_2+\ldots+m_n}}$$

"Локальное неравенство". Для натуральных чисел $n \geq m$, выполняется неравенство $\frac{a^n}{b^m} \geq \frac{na^{n-m} - mb^{n-m}}{n-m}$. Равенство достигается только при $a = b$

Задачи.

Все неравенства для положительных чисел.

1. Докажите неравенство $a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a + b + c)$
2. Докажите неравенство $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 \geq a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2$.
3. Докажите "локальное неравенство".
4. Докажите неравенство $\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
5. Докажите неравенство $\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$
6. Докажите неравенство $\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}$
7. Докажите неравенство $\frac{a^2}{b(a+c)} + \frac{b^2}{c(b+d)} + \frac{c^2}{d(c+a)} + \frac{d^2}{a(d+b)} \geq 2$
8. Докажите неравенство $\frac{a_1^3}{a_1+a_2} + \frac{a_2^3}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_n^3}{a_n+a_1} \geq \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$
9. Докажите неравенство $\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geq 1$