Числа Фибоначчи

Числами Фибоначчи называют последовательность чисел $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geqslant 3$.

1. Докажите, что $F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$.

2. Последовательность чисел $a_0 = 0$, a_1, a_2, $\ldots$ такова, что $a_n > 0$ при $n > 0$ и НОД$(a_m, a_n) =$ НОД(a_{m-n}, a_n) для любых $m > n \geqslant 1$. Докажите, что НОД$(a_m, a_n) = a_d$, где $d =$ НОД(m, n).

3. а) Докажите, что числа F_n и F_{n+1} взаимно просты.
б) Докажите, что НОД$(F_m, F_n) = F_d$, где $d =$ НОД(m, n).

4. Докажите, что если $m > 2$, то F_n делится на F_m тогда и только тогда, когда n делится на m.

5. Докажите, что

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

6. Докажите, что для любого натурального n число $C_n^1 + 5C_n^3 + 25C_n^5 + 125C_n^7 + \ldots$ делится на 2^{n-1}.

7. а) Рассмотрим последовательность многочленов $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$ при $n \geqslant 3$. Докажите, что

$$f_{n+1}(x) = x^n + C_{n-1}^1 x^{n-2} + C_{n-2}^2 x^{n-4} + C_{n-3}^3 x^{n-6} + \ldots$$

б) Докажите, что $F_{n+1} = 1 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + \ldots$

8. Докажите, что

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = F_1 + F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + \cdots$$

9. Докажите, что для любого натурального числа n найдётся число Фибоначчи, делящееся на n.

10. Докажите, что сумма восьми последовательных чисел Фибоначчи не может быть равна числу Фибоначчи.

11. Докажите, что если $a^2 - ab - b^2 = \pm 1$, где a и b — натуральные числа, то $a = F_{n+1}$ и $b = F_n$ для некоторого n.

12. Найдите все решения в натуральных числах уравнения $C_n^{m-1} = C_{n-1}^m$.

13. а) Докажите, что $F_{2n+1}F_{2n-1} = F_{2n}^2 + 1$.
б) Докажите, что $F_{2n+1}^2 + F_{2n-1}^2 + 1 = 3F_{2n+1}F_{2n-1}$.

14. При каких натуральных a и b число $a^2 + b^2 + 1$ делится на ab?

15. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых $a^2 + 1$ делится на b, а $b^2 + 1$ делится на a.

16. Докажите, что любое натуральное число n единственным образом можно представить в виде $n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_m}$, где $k_1 > k_2 + 1$, $k_2 > k_3 + 1$, $\ldots$, $k_{m-1} > k_m + 1$, $k_m > 1$.

17. Пусть $p = 4k + 3$ — простое число. Докажите, что если $a^2 + b^2$ делится на p, то оба числа a и b делятся на p.

18. Докажите, что число Фибоначчи с нечётным номером не может делиться на простое число вида $4k + 3$.

19. Докажите, что среди чисел Фибоначчи квадратами являются только $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и F_{12}.

Числа Фибоначчи в комбинаторике

20. Чему равно количество подмножеств множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, не содержащих двух последовательных чисел?

21. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы нескольких слагаемых, равных 1 или 2?

22. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы нескольких целых слагаемых $a_i \geqslant 2$? (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

23. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы положительных нечётных слагаемых. (Представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными.)

Числа Фибоначчи и алгоритм Евклида

24. Пусть a и b — натуральные числа, причём $a > b$ и $\text{НОД}(a, b) = d$. Докажите, что если алгоритм Евклида, применённый к a и b, останавливается после n шагов, то $a \geqslant dF_{n+2}$ и $b \geqslant dF_{n+1}$.

25. а) Докажите, что $F_{n+5} \geqslant 10F_n$.
б) Докажите, что если $F_{n+1} < 10^k$, то $n \leqslant 5k$.

26. Докажите, что количество шагов алгоритма Евклида, применённого к паре натуральных чисел $a > b$, не превосходит количества цифр десятичной записи числа b, умноженного на 5.

Рекуррентные последовательности

Рекуррентной последовательностью порядка k называют последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots$, где числа $u_1, u_2, \ldots, u_k$ произвольные, а при всех $n \geqslant 1$ выполняется соотношение $u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + \cdots + a_ku_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые фиксированные числа.

27. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — фиксированные числа и $u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + \cdots + a_ku_n$. Докажите, что

$$u_1 + u_2x + u_3x^2 + u_4x^3 + \cdots = \frac{P_{k-1}(x)}{1 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_kx^k},$$

где $P_{k-1}(x)$ — многочлен степени не выше $k - 1$.

28. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — попарно различные числа. Докажите, что для любых $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \cdots + x_n & = & b_0, \\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n & = & b_1, \\ a_1^2x_1 + \cdots + a_n^2x_n & = & b_2, \\ \ldots\ldots & & \ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + \cdots + a_n^{n-1}x_n & = & b_{n-1} \end{array}\right.$$

имеет решение, причём ровно одно.

29. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — фиксированные числа и $u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + \cdots + a_ku_n$. Предположим, что $x_1, \ldots, x_k$ — попарно различные корни уравнения $x^k = a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_k$. Докажите, что тогда $u_n = c_1x_1^{n-1} + \cdots + c_kx_k^{n-1}$ для некоторых фиксированных $c_1, \ldots, c_k$.

30. Пусть $a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1$ и

$$a_{n+3} = \frac{(n^2 + n + 1)(n + 1)}{n}a_{n+2} + (n^2 + n + 1)a_{n+1} - \frac{n + 1}{n}a_n$$

при $n \geqslant 1$. Докажите, что a_n — квадрат целого числа для любого $n \geqslant 1$.

31. Пусть $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$ и $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$ при $n \geqslant 4$. Докажите, что $u_{2n} - u_{n-1}^2$ и $u_{2n+1} - u_{n+1}^2$ делятся на u_n.