Акопян А.В.

Евклидовы Коники

Эллипсом с фокусами F_1 *и* F_2 называется множество точек, сумма расстояний от которых до F_1 и F_2 постоянна.

Гиперболой с фокусами F_1 *и* F_2 называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до F_1 и F_2 постоянен.

Параболой с фокусами F *и директрисой* d называется множество точек, равноудаленных от F и d.

Будем эти фигуры называть кониками.

Оказывается, что эти три фигуры есть образы окружности при проективных преобразованиях.

Как следствие, для них верны теоремы Паскаля и Брианшона, а также можно делать полярные преобразования относительно данных кривых.

Подробнее о полярных преобразованиях см. А.А.Заславский "Геометрические преобразования" (М., МЦНМО, 2004) и М.Берже "Геометрия" том 2 (М., Мир, 1984).

Задача №-2. Покажите, что через любые пять точек общего положения проходит ровно одна коника.

Задача №-1. Покажите, что для любых пяти прямых общего положения существует ровно одна коника касающееся данных пяти кривых.

Задача №0. Докажите, что касательная к эллипсу в точке X есть биссектриса внешнего угла F_1XF_2.

Задача №1. Докажите, что касательная к гиперболе в точке X есть биссектриса угла F_1XF_2.

Задача №2. Касательные к эллипсу в точках X и Y пересекаются в точках A. Докажите, что углы XAF_1 и YAF_2 равны. Найти ГМТ точек A таких, что угол XAY прямой. Исследуйте аналогичную задачу для гиперболы или параболы.

Задача №3. Докажите, что директриса полярна фокусу параболы.

Прямые полярные фокусам гиперболы и эллипса тоже будем называть директрисами.

Задача №4. Докажите, что для любой точки на эллипсе или гиперболе, отношение расстояний до фокуса и до соответствующий ему директрисы постоянно. Что можно сказать про это отношение?

Задача №5. Пусть парабола касается трех прямых, содержащих стороны треугольника.

а) Покажите, что её фокус лежит на описанной окружности этого треугольника.

б) Выведите отсюда, что описанные окружности треугольников образованных четырьмя прямыми пересекаются в одной точке (*точке Микеля*).

Задача №6. Пусть парабола касается трех прямых, содержащих стороны треугольника.

а) Покажите, что её директриса проходит через ортоцентр.

б) Выведите отсюда, что ортоцентры треугольников образованных четырьмя прямыми лежат на одной прямой.

Задача №7. Пусть точка A лежит на директрисе коники. Докажите, что прямая соединяющая данную точку с соответствующим директрисе фокусом перпендикулярна прямой, полярной точке A.

Задача №8. Пусть задан эллипс и охватывающая его замкнутая нить. Покажите, что если натянуть нить с помощью карандаша, то карандаш нарисует эллипс, софокусный с данным.

Задача №9. Докажите, что все выпуклые n-угольники максимального периметра, вписанные в данный эллипс, касаются некоторого софокусного эллипса.

Задача №10. Докажите, что гипербола проведенная через три данные точки равнобока, равносильно тому, что она проходит через ортоцентр треугольника образованного этими точками.

Задача №11. Докажите, что при вращении двух прямых вокруг некоторых точек на этих прямых с равными по модулю скоростями, но противоположными по направлению, точка пересечения рисует равнобокую гиперболу.

Задача №12. Докажите, что окружность Эйлера проходит через центр равнобокой гиперболы, проходящей через вершины треугольника.

Задача №13. Докажите, что однополостный гиперболоид содержит прямую.