ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ГРАФОВ (ОЛИМПИАДЫ И МАТЕМАТИКА, 9.04)

0. (a) Некоторые пары (из конечного числа) городов соединены (беспосадочными) авиалиниями. Обязательно ли найдутся два города, из которых можно перелететь (за один раз) в одинаковое число городов?

(b) Агент иностранной разведки сообщил, что каждая из 15 бывших республик СССР заключила договор ровно с 3 другими. Можно ли ему доверять?

(c) Выпуклый многоугольник (отличный от треугольника) разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Обязательно ли найдутся хотя бы два треугольника разбиения, примыкающие сторонам многоугольника хотя бы двумя сторонами?

(d)* Рассеянный математик забыл трехзначный код своего замка́. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед этим были набраны другие цифры). Математик набирает одну цифру в секунду. Докажите, что математик сможет открыть замок за 1002 секунды.

Графом (точнее, графом без петель и кратных ребер) называется конечное множество V, некоторые двухэлементные подмножества (т.е. неупорядоченные пары) которого выделены. Элементы множества V называются *вершинами* графа и обычно изображаются точками (например, на плоскости). Выделенные пары вершин называются *ребрами* графа и обычно изображаются ломаными (или кривыми), соединяющими соответствующие точки. На изображении ломаные могут пересекаться, но точки пересечения (кроме двух концов ребра) не являются вершинами.

Степенью вершины графа называется число выходящих из нее ребер.

Путем в графе называется конечная последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром. *Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путем. Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит несамопересекающихся циклов.

Количества вершин и ребер графа обозначаются V и E соответственно.

Если условие задачи является утверждением, то задача состоит в том, чтобы доказать это утверждение.

2. Степени вершин. (a) В любом графе найдутся две вершины одинаковой степени.

(b) Сумма степеней вершин в любом графе четна и равна $2E$.

(c) При каких E и V существует граф с V вершинами и E ребрами, каждая вершина которого имеет степень 3? Такие графы называют *кубичными* или *правильными степени 3*.

3. Деревья. (a) В любом дереве, отличном от точки, найдется вершина степени 1 (даже две).

(b) В любом дереве $V - E = 1$.

(c) В любом связном графе G существует *максимальное дерево*, или *остов*, т.е. дерево, содержащее все вершины графа G. Это дерево не единственно.

4. Эйлеровы графы. Цикл (путь) называется *эйлеровым*, если он проходит через каждое *ребро* ровно по одному разу.

(a) В графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф связен и степень каждой его вершины четна.

(b) При каком условии в *ориентированном* графе (т.е. в котором на ребрах задано направление; двигаться по ребру в пути можно только вдоль направления) существует эйлеров цикл?

(c) В нарисованном на плоскости без самопересечений графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда грани можно правильно раскрасить в 2 цвета (указание: построение *двойственного графа* см. на рисунке).

1. Изоморфизм. Грубо говоря, графы изоморфны, если они одинаковы (при этом их изображения на плоскости могут быть разными). Формально, графы G_1 и G_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение $f : V_1 \to V_2$ множества V_1 вершин графа G_1 на множество V_2 вершин графа G_2, удовлетворяющее условию: *вершины $A, B \in V_1$ соединены ребром в том и только в том случае, если вершины $f(A), f(B) \in V_2$ соединены ребром.*

Какие из графов на рисунке изоморфны?