Сильно регулярные графы

Определение. Граф называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), если (а) в нем v вершин; (б) степень каждой вершины равна k; (в) любая пара вершин, связанных ребром, имеет одинаковое число общих соседей λ; (г) любая пара вершин, не связанных ребром, имеет одинаковое число общих соседей μ; (д) граф связен и (е) дополнительный граф (в котором ребра и неребра меняются местами) также связен.

1. Проверьте, что цикл на 5 вершинах является сильно регулярным графом с параметрами (5,2,0,1).

2. Найдите все сильно регулярные графы с $\mu = 0$ и с $\mu = k$.

3. Докажите, что для сильно регулярного графа с $\mu \neq 0$ выполняется соотношение

$$v - 2k + \mu - 2 \geqslant 0.$$

4. Докажите, что не существует сильно регулярных графов с параметрами (25,8,1,3).

5. Докажите, что для сильно регулярного графа с $\mu \neq 0$ выполняется соотношение

$$v = \frac{\mu + k(k - 1 + \mu - \lambda)}{\mu}.$$

6. Найдите все сильно регулярные графы с (а) $k = 2$, (б) $k = 3$.

Сильно регулярные графы

Определение. Граф называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), если (а) в нем v вершин; (б) степень каждой вершины равна k; (в) любая пара вершин, связанных ребром, имеет одинаковое число общих соседей λ; (г) любая пара вершин, не связанных ребром, имеет одинаковое число общих соседей μ; (д) граф связен и (е) дополнительный граф (в котором ребра и неребра меняются местами) также связен.

1. Проверьте, что цикл на 5 вершинах является сильно регулярным графом с параметрами (5,2,0,1).

2. Найдите все сильно регулярные графы с $\mu = 0$ и с $\mu = k$.

3. Докажите, что для сильно регулярного графа с $\mu \neq 0$ выполняется соотношение

$$v - 2k + \mu - 2 \geqslant 0.$$

4. Докажите, что не существует сильно регулярных графов с параметрами (25,8,1,3).

5. Докажите, что для сильно регулярного графа с $\mu \neq 0$ выполняется соотношение

$$v = \frac{\mu + k(k - 1 + \mu - \lambda)}{\mu}.$$

6. Найдите все сильно регулярные графы с (а) $k = 2$, (б) $k = 3$.

Сильно регулярные графы

Определение. Граф называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), если (а) в нем v вершин; (б) степень каждой вершины равна k; (в) любая пара вершин, связанных ребром, имеет одинаковое число общих соседей λ; (г) любая пара вершин, не связанных ребром, имеет одинаковое число общих соседей μ; (д) граф связен и (е) дополнительный граф (в котором ребра и неребра меняются местами) также связен.

1. Проверьте, что цикл на 5 вершинах является сильно регулярным графом с параметрами (5,2,0,1).

2. Найдите все сильно регулярные графы с $\mu = 0$ и с $\mu = k$.

3. Докажите, что для сильно регулярного графа с $\mu \neq 0$ выполняется соотношение

$$v - 2k + \mu - 2 \geqslant 0.$$

4. Докажите, что не существует сильно регулярных графов с параметрами (25,8,1,3).

5. Докажите, что для сильно регулярного графа с $\mu \neq 0$ выполняется соотношение

$$v = \frac{\mu + k(k - 1 + \mu - \lambda)}{\mu}.$$

6. Найдите все сильно регулярные графы с (а) $k = 2$, (б) $k = 3$.

7. Постройте сильно регулярные графы с параметрами
(а) (16,5,0,2); (б) (49,12,5,2); (в) (45,16,8,4); (г) (13,6,2,3); (д) (50, 7, 0, 1); (е) (27,10,1,5).

8. Постройте как можно больше бесконечных серий сильно регулярных графов.

9. Найдите все сильно регулярные графы с $\mu = 1$, $\lambda = 1$.

10. Обозначим через r, s $(r > s)$ корни уравнения $x^2 + (\mu - \lambda)x + (\mu - k) = 0$. Докажите, что если существует сильно регулярный граф с параметрами k, λ, μ, то числа

$$f = -\frac{k(s+1)(k-s)}{\mu(r-s)} \quad \text{и} \quad g = \frac{k(r+1)(k-r)}{\mu(r-s)}$$

целые неотрицательные.

11. Докажите, что в сильно регулярном графе количество треугольников, проходящих через вершину, одинаково для всех вершин.

12. Докажите, что для сильно регулярных графов с $\lambda = 0$, $\mu = 1$ степень k может принимать лишь значения 2, 3, 7, 57.

13.* Существует ли сильно регулярный граф с $\lambda = 0, \mu = 1, k = 57$?

---

7. Постройте сильно регулярные графы с параметрами
(а) (16,5,0,2); (б) (49,12,5,2); (в) (45,16,8,4); (г) (13,6,2,3); (д) (50, 7, 0, 1); (е) (27,10,1,5).

8. Постройте как можно больше бесконечных серий сильно регулярных графов.

9. Найдите все сильно регулярные графы с $\mu = 1$, $\lambda = 1$.

10. Обозначим через r, s $(r > s)$ корни уравнения $x^2 + (\mu - \lambda)x + (\mu - k) = 0$. Докажите, что если существует сильно регулярный граф с параметрами k, λ, μ, то числа

$$f = -\frac{k(s+1)(k-s)}{\mu(r-s)} \quad \text{и} \quad g = \frac{k(r+1)(k-r)}{\mu(r-s)}$$

целые неотрицательные.

11. Докажите, что в сильно регулярном графе количество треугольников, проходящих через вершину, одинаково для всех вершин.

12. Докажите, что для сильно регулярных графов с $\lambda = 0$, $\mu = 1$ степень k может принимать лишь значения 2, 3, 7, 57.

13.* Существует ли сильно регулярный граф с $\lambda = 0, \mu = 1, k = 57$?

---

7. Постройте сильно регулярные графы с параметрами
(а) (16,5,0,2); (б) (49,12,5,2); (в) (45,16,8,4); (г) (13,6,2,3); (д) (50, 7, 0, 1); (е) (27,10,1,5).

8. Постройте как можно больше бесконечных серий сильно регулярных графов.

9. Найдите все сильно регулярные графы с $\mu = 1$, $\lambda = 1$.

10. Обозначим через r, s $(r > s)$ корни уравнения $x^2 + (\mu - \lambda)x + (\mu - k) = 0$. Докажите, что если существует сильно регулярный граф с параметрами k, λ, μ, то числа

$$f = -\frac{k(s+1)(k-s)}{\mu(r-s)} \quad \text{и} \quad g = \frac{k(r+1)(k-r)}{\mu(r-s)}$$

целые неотрицательные.

11. Докажите, что в сильно регулярном графе количество треугольников, проходящих через вершину, одинаково для всех вершин.

12. Докажите, что для сильно регулярных графов с $\lambda = 0$, $\mu = 1$ степень k может принимать лишь значения 2, 3, 7, 57.

13.* Существует ли сильно регулярный граф с $\lambda = 0, \mu = 1, k = 57$?