Всюду далее под графом понимается неориентированный граф без петель и кратных ребер.

Графические последовательности

Степенью вершины называется количество выходящих из вершины ребер. *Последовательность степеней* вершин содержит степени всех вершин графа в порядке невозрастания. Мы используем экспоненциальную запись невозрастающих целочисленных последовательностей: a^k означает, что k последовательных членов последовательности равны a.

Основной вопрос для всей серии задач, которая приводится ниже, состоитв том, чтобы определить, какие последовательности являются *графическими*, то есть представляют последовательность степеней вершн некоторого графа.

1. (Старинная олимпиадная задача) Графична ли последовательность (15^{77})?

2. Графичны ли последовательности а) $(4^3, 1^6)$, б) $(6^4, 2^3)$ в) $(5^3, 3^3)$, г) $(18^{10}, 12^3, 6^8)$, д) $(15^8, 10^6, 3^4)$?

3. Докажите, что при любых $0 \leqslant k \leqslant n$ таких, что kn — четное, существует граф на n вершинах, степени которого равны k.

4. Назовем *обменом* следующее преобразование графа. Пусть a, b, c, d — вершины графа, причем (ab), (cd) — рёбра, а $(ac), (bd)$ — не рёбра. Обмен состоит в выбрасывании рёбер $(ab), (cd)$ и добавлении рёбер $(ac), (bd)$.

Пусть G_1, G_2 — два графа с одинаковыми последовательностями степеней $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$. Докажите, что обменами можно перевести граф G_1 в граф G_2.

$4\frac{1}{2}$. Докажите, что для любой вершины v найдется такая последовательность обменов, после которой вершина v будет соединена с вершианми максимально возможной степени.

Всюду далее под графом понимается неориентированный граф без петель и кратных ребер.

Графические последовательности

Степенью вершины называется количество выходящих из вершины ребер. *Последовательность степеней* вершин содержит степени всех вершин графа в порядке невозрастания. Мы используем экспоненциальную запись невозрастающих целочисленных последовательностей: a^k означает, что k последовательных членов последовательности равны a.

Основной вопрос для всей серии задач, которая приводится ниже, состоитв том, чтобы определить, какие последовательности являются *графическими*, то есть представляют последовательность степеней вершн некоторого графа.

1. (Старинная олимпиадная задача) Графична ли последовательность (15^{77})?

2. Графичны ли последовательности а) $(4^3, 1^6)$, б) $(6^4, 2^3)$ в) $(5^3, 3^3)$, г) $(18^{10}, 12^3, 6^8)$, д) $(15^8, 10^6, 3^4)$?

3. Докажите, что при любых $0 \leqslant k \leqslant n$ таких, что kn — четное, существует граф на n вершинах, степени которого равны k.

4. Назовем *обменом* следующее преобразование графа. Пусть a, b, c, d — вершины графа, причем (ab), (cd) — рёбра, а $(ac), (bd)$ — не рёбра. Обмен состоит в выбрасывании рёбер $(ab), (cd)$ и добавлении рёбер $(ac), (bd)$.

Пусть G_1, G_2 — два графа с одинаковыми последовательностями степеней $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$. Докажите, что обменами можно перевести граф G_1 в граф G_2.

$4\frac{1}{2}$. Докажите, что для любой вершины v найдется такая последовательность обменов, после которой вершина v будет соединена с вершианми максимально возможной степени.

Невозрастающую последовательность из n неотрицательных целых чисел будем называть правильной, если первый ее член не превосходит $n-1$, а сумма всех членов четна.

5. Дерево — связный граф без циклов. В дереве на n вершинах ровно $n-1$ ребро. Докажите, что если сумма членов правильной последовательности $(d_1, \ldots, d_n)$ равна $2(n-1)$ и $d_n > 0$, то существует дерево, для которого данная последовательность является последовательностью степеней вершин.

6. Приведите пример правильной неграфической последовательности из n чисел, для всех членов которой выполняются неравенства $n/2004 \geqslant d_i \geqslant 2004$.

7. Докажите, что правильная последовательность n положительных чисел, в которой $d_i \leqslant \sqrt{n}/2$, — графическая.

8. Докажите, что правильная последовательность является графической тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) \text{ для любого } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

9.* Можно ли опустить какие-нибудь неравенства из условия предыдущей задачи так, чтобы ее утверждение осталось верным? Если да, попробуйте найти минимально возможный набор неравенств.

10.* Если слить две графические последовательности, то обязательно получится графическая последовательность. А какие графические последовательности обладают тем свойством, что их нельзя разбить на две графические последовательности?

Невозрастающую последовательность из n неотрицательных целых чисел будем называть правильной, если первый ее член не превосходит $n-1$, а сумма всех членов четна.

5. Дерево — связный граф без циклов. В дереве на n вершинах ровно $n-1$ ребро. Докажите, что если сумма членов правильной последовательности $(d_1, \ldots, d_n)$ равна $2(n-1)$ и $d_n > 0$, то существует дерево, для которого данная последовательность является последовательностью степеней вершин.

6. Приведите пример правильной неграфической последовательности из n чисел, для всех членов которой выполняются неравенства $n/2004 \geqslant d_i \geqslant 2004$.

7. Докажите, что правильная последовательность n положительных чисел, в которой $d_i \leqslant \sqrt{n}/2$, — графическая.

8. Докажите, что правильная последовательность является графической тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i) \text{ для любого } 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

9.* Можно ли опустить какие-нибудь неравенства из условия предыдущей задачи так, чтобы ее утверждение осталось верным? Если да, попробуйте найти минимально возможный набор неравенств.

10.* Если слить две графические последовательности, то обязательно получится графическая последовательность. А какие графические последовательности обладают тем свойством, что их нельзя разбить на две графические последовательности?