Целые точки (Н. Г. Мощевитин)

1. На координатной плоскости имеется треугольник у которого все вершины являются целыми точками, а других целых точек в нем нет. Доказать, что его площадь равна $1/2$.

2. В пространстве имеется тетраэдр, все вершины которого имеют целочисленные координаты и других целых точек в нем (в том числе и на его границе) нет. Чему может равняться его объем?

3. В пространстве имеется тетраэдр, все вершины которого имеют целочисленные координаты и других целых точек в нем (в том числе и на его границе) нет. Чему может равняться его объем?

3^*. Тот же вопрос для 4-угольной пирамиды с вершинами в целых точках.

4. Доказать, что всякая фигура на плоскости с площадью $\geq p-1$ содержит p точек $x_1, ..., x_p$, таких, что все вектора $\overline{x_i x_j}$ имеют целые координаты. (Лемма Блихфельдта). Как выглядит аналогичное утверждение для пространства?

5. Доказать, что всякое выпуклое центрально симметричное относительно начала координат множество площади $> 2^2$ содержит отличную от нуля целую точку. (Теорема Минковского) Замечание: если фигура замкнута, то достатачно требовать, чтобы площадь была $\geq 2^2$. Как выглядит аналогичный результат в пространстве?

Решеткой на плоскости называется множество точек вида $me_1 + ne_2$, где e_1, e_2 суть два фиксированных неколлинеарных вектора, а m, n пробегают все целые числа. Площадь параллелограмма, образованного векторами e_1, e_1 называется фундаментальной площадью решетки. Что такое решетка в пространстве?

6. Как выглядят лемма Блихфельдта и теорема Минковского, если множество целых точек заменить произвольной решеткой?

7. В пространстве имеется октаэдр симметричный относительно начала координат (но не обязательно правильный), все вершины которого имеют целочисленные координаты и других целых точек в нем (кроме начала координат) нет. Чему может равняться его объем?

8^*. Определить минимальное R такое, что если дана произвольная решетка на плоскости с фундаментальной площадью 1 то круг радиуса R можно расположить так, что в него попадет не менее 3 точек решетки.

9^{**}. Решить задачу 8^* для решетки в пространстве (Надо "поймать" шаром радиуса R четыре точки решетки с фунд. объемом 1). Решивших эту задачу автор просит связаться с ним по moshchecitin.at.rambler.ru.

10. Доказать, что площадь многоугольника с вершинами в целых точках выражается по формуле $S = m + n/2 - 1/2$, где m – количество целых точек внутри многоугольника, n – количество целых точек на его границе.

11. Какие правильные многоугольники могут иметь вершины в а) целых точках, б) в точках некоторой решетки.

12. Тот же вопрос для правильных многогранников.