Неравенства
М.А.Берштейн

1) Докажите, что при натуральных m и n выполняется неравенство

$$\frac{m^2+n^2}{m+n} \geqslant \sqrt[m+n]{m^m n^n}$$

2) Докажите, что при натуральных a, b и c выполняется неравенство

$$\left(\frac{a^a+b^b+c^c}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \geqslant a^a b^b c^c$$

Докажите, что для любых положительных x_1, x_2, $\ldots x_n$ выполняется неравенство

3) $\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_3}+\ldots\dfrac{x_n^2}{x_1} \geqslant x_1+x_2+\ldots+x_n$

4) $\dfrac{x_1^3}{x_2}+\dfrac{x_2^3}{x_3}+\ldots+\dfrac{x_n^3}{x_1} \geqslant x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$

5) $\dfrac{x_1^3}{x_2^2}+\dfrac{x_2^3}{x_3^2}+\ldots+\dfrac{x_n^3}{x_1^2} \geqslant x_1+x_2+\ldots+x_n$

6) $\dfrac{x_1^2}{x_1+x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_2+x_3}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{x_n+x_1} \geqslant \dfrac{1}{2}\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)$

7) $\dfrac{x_1^3}{x_1+x_2}+\dfrac{x_2^3}{x_2+x_3}+\ldots+\dfrac{x_n^3}{x_n+x_1} \geqslant \dfrac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)$