Производящие функции (И.И.Богданов)

0. а) Найдите коэффициент при x^{148} в многочлене $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\cdots(1+x^{1024})$.

б) Найдите коэффициент при x^k в многочлене $(1+x)^n(1+x)=(1+x)^{n+1}$ двумя способами.

Мы видим, что знакомая нам формула хорошо записывается на языке многочленов. Вот еще пара подобных формул.

1. а) Докажите, что $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

б) Чему равно $C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-\cdots+n(-1)^{n+1}C_n^n$?

в) Выразите в замкнутом виде $C_n^0C_m^{2k}+C_n^2C_m^{2k-2}+\cdots+C_n^{2k}C_m^0$.

Комбинаторный смысл имеют, конечно же, не только коэффициенты многочлена $(1+x)^n$.

2. Найдите комбинаторный смысл коэффициентов у а) $(x^2+x+1)^n$;

б) $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$ (количество сомножителей бесконечно!).

в) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$.

Что написано в пунктах б) и в)? После раскрытия скобок получится "многочлен бесконечной степени" — сумма бесконечного количества одночленов. Такая сумма обычно называется формальным степенным рядом*; мы не будем задаваться вопросами, какое значение принимает в той или иной точке. Заметим, что при любом члене x^n после приведения подобных стоит конечный коэффициент, и для его вычисления достаточно знать лишь конечное количество скобок.*

Заметим, что произведение в пункте в) можно записать короче:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}. \qquad (1)$$

Действительно, легко заметить, что после умножения на $(1-x)$ ряд становится единицей.

г) $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$.

Степенной ряд в пункте г) можно вычислять как минимум двумя способами: а) перемножить все ряды вида $\dfrac{1}{1-x^k}=1+x^k+x^2k+\cdots$ и б) подставить в выражение (1) тот ряд*, который получится после раскрытия скобок в знаменателе. Мы будем принимать на веру тот факт, что результат подобных действий не зависит от способа вычислений. Тем не менее, желающие могут для уверенности в себе попытаться его доказать.*

Определение. Производящей функцией (конечной или бесконечной) последовательности (a_n) называется

$$f(x)=\sum a_nx^n.$$

Так, для последовательностей $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ и $1, 1, 1, \ldots$ производящими функциями являются $f(x)=(x+1)^n$ и $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, соответственно.

3. Запишите (в виде бесконечного произведения) производящую функцию для последовательности (2^{a_n}), где a_n — сумма цифр числа n.

4. а) Докажите, что натуральное число N может быть ровно $2^{N-1}-1$ различными способами представлено в виде суммы меньших натуральных слагаемых, если представления, отличающиеся порядком слагаемых, считать различными. (Например, у числа 4 имеется 7 представлений: $4=1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=2+2=1+3=3+1$.)

б) Какой будет ответ, если каждое разбиение считать столько раз, сколько в нем слагаемых?

5. а) Найдите производящую функцию чисел Фибоначчи F_n.

б) Найдите производящую функцию последовательности $a_n = F_1+F_2+\dots+F_n$. Вспомните и докажите еще раз, что $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.

в) Докажите еще какие-нибудь свойства чисел Фибоначчи подобными методами.

Определение. Числа Каталана задаются соотношениями $c_0 = 1$, $c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \dots + c_nc_0$. Они обладают массой комбинаторных интерпретаций; в частности, c_n — это количество правильных скобочных записей (т. е. таких, в которых ни в какой момент количество закрывающих скобок не превосходит количества открывающих), количество триангуляций выпуклого $(n+2)$-угольника или количество путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n), идущих по ребрам решетки только вправо и вверх и не выходящих выше диагонали $y = x$.

6. а) Найдите производящую функцию для чисел Каталана.

б) Найдите явную формулу для чисел Каталана.

Подсказка. $\sqrt{1-2x} = 1 - x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{3!!\cdot x^3}{3!} - \dfrac{5!!\cdot x^4}{4!} - \dots - \dfrac{(2n-3)!!\cdot x^n}{n!} - \dots$.

в)* Пусть $C_{n,k}$ — количество таких путей из точки $(0,0)$ в точку (n,n), идущих по ребрам решетки только вправо и вверх, что ровно $2k$ ребер лежат выше диагонали $y = x$. Докажите, что $C_{n,k} = c_n$. (Как следствие, отсюда вытекает другое решение пункта б).)

Указание. Рассмотрите функцию $f(x,y) = \sum C_{n,k}x^ny^k$.

7*. Пусть n — нечетное натуральное число, $T_n = \{k \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k \leqslant n : (k,n) = 1\}$ — множество всех остатков по модулю n, взаимно простых с n. Рассмотрим суммы всех непустых подмножеств множества T_n. Докажите, что среди этих сумм есть поровну сумм, дающих фиксированный остаток от деления на n.

8. Докажите, что для произвольного s

$$\frac{2^s}{2^s-1}\cdot\frac{3^s}{3^s-1}\cdot\frac{5^s}{5^s-1}\cdot\frac{7^s}{7^s-1}\cdots = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

(в левой части произведение по всем простым числам, в правой — сумма по всем натуральным).

9. Докажите, что число способов разбить число на нечетные слагаемые равно числу способов разбить его на различные слагаемые. Разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

10. а) Докажите, что производящая функция последовательности (a_n) является рациональной тогда и только тогда, когда (a_n) является линейной рекуррентой, т. е. удовлетворяет соотношению вида

$$a_{n+k} = c_1a_{n+k-1} + \dots + c_ka_n. \tag{2}$$

Что за многочлен стоит в знаменателе?

б) Пусть (a_n) — линейная рекуррента. Докажите, что последовательность $b_n = a_1 + \dots + a_n$ также является линейной рекуррентой.

в) Выведите и докажите общую формулу линейной рекурренты, удовлетворяющей данному уравнению (2).