ПРИНЦИП КРАЙНЕГО

1. На прямой дано два семейства отрезков. Известно, что любые два отрезка из разных семейств можно прибить одним гвоздем. Докажите, что все отрезки какого-то из семейств можно прибить одним гвоздем.

2. На прямой даны отрезки $n \geqslant 2$ цветов так, что из любых n отрезков разных цветов какие-то 2 можно прибить одним гвоздем. Докажите, что все отрезки какого-то из цветов можно прибить $n-1$ гвоздем.

3. На плоскости даны прямоугольники двух цветов со сторонами, параллельными линиям сетки, причем любые два прямоугольника разных цветов пересекаются. Докажите, что либо все прямоугольники какого-то из цветов имеют общую точку, либо прямоугольники каждого цвета можно пересечь одной прямой.

4. На плоскости расположены многоугольники двух цветов так, что любые два многоугольника одного цвета пересекаются. Докажите, что все многоугольники можно пересечь одной прямой.

5. На плоскости расположены выпуклые многоугольники двух цветов так, что для каждого цвета существуют два многоугольника этого цвета, которые не пересекаются. Известно, что любые два многоугольника разных цветов имеют общую точку. Докажите, что все многоугольники можно пересечь одной прямой.

6. На плоскости расположены равные квадраты $n \geqslant 2$ различных цветов так, что любые n квадратов разных цветов пересекаются. Докажите, что все квадраты какого-то из цветов можно прибить $2n-2$ гвоздями.

7. На плоскости проведено несколько прямых так, что через любую точку пересечения двух прямых проходит как минимум еще одна прямая. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

8. На плоскости проведено несколько прямых двух цветов (каждого цвета хотя бы две прямые). Известно, что через любую точку пересечения одноцветных прямых проходит как минимум одна прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ

9. На плоскости дано несколько точек, причем любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки можно накрыть одним кругом радиуса 1.

10. На плоскости дано несколько точек так, что расстояние между любыми двумя из них не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. На плоскости дана выпуклая фигура, проекция которой на любую прямую — отрезок длины не менее 1. Докажите, что в эту фигуру можно поместить круг радиуса $1/3$.

12. На плоскости дано несколько попарно параллельных отрезков. Известно, что любые три из них можно пересечь одной прямой. Докажите, что все отрезки можно пересечь одной прямой.