Асимптотика.

Составитель Кудряшов Ю. Г.

Определения и полезные факты.

Определение 1. Говорят, что последовательность $a_n > 0$ растёт асимптотически *не быстрее* последовательности $b_n > 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся лишь конечное множество индексов k таких, что $a_n > (1+\varepsilon)b_n$. Обозначение: $a_n \lesssim b_n$.

Определение 2. Говорят, что $a_n \sim b_n$, если $a_n/b_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Задача 1. Докажите, что если $a_n \lesssim b_n$ и $b_n \lesssim c_m$, то $a_n \lesssim c_n$.
Задача 2. Докажите, что $a_n \sim b_n$ тогда и только тогда, когда $a_n \lesssim b_n$ и $b_n \lesssim a_n$.

Определение 3. Говорят, что $a_n \ll b_n$, если $a_n/b_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Задача 3. Докажите, что если $a_n \lesssim b_n$ и $b_n \ll c_m$, то $a_n \ll c_n$.
Задача 4. Докажите, что $\ln n \ll n^\alpha$ для любого $\alpha > 0$.
Задача 5. Докажите, что $n^\alpha \ll a^n$ для любых $\alpha > 0$, $a > 1$.

Примеры применения.

Задача 6. Может ли конь обойти бесконечную шахматную доску, побывав на каждой белой клетке по одному разу, а на каждой чёрной клетке по два раза?
Задача 7. На плоскости расположено 10 точек и 10 прямых. Докажите, что можно найти такую точку, расстояние от которой до любой прямой будет меньше, чем до любой из точек.
Задача 8. Докажите, что если натуральные числа $k_1, k_2, \ldots, k_s$ таковы, что

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_s} < 1,$$

то существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $n_1^{k_1} + n_2^{k_2} + \cdots + n_s^{k_s}$.