Задачи по теории чисел.

Составитель А. И. Галочкин

1. (*Дискретность множества целых чисел*)

Решить уравнения в натуральных числах.

а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

б) $4xy+4yz+4xz=5xyz+14$

в) $y^3=x^3+9x^2+17$

г) Решить в целых числах $(x^2+y^2)(x+y-3)=2xy$

д) Пусть x, y, z, u, v, w — натуральные числа такие, что

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{2003}{z}}=u+\cfrac{1}{v+\cfrac{2003}{w}}.$$

Найти наибольшую разность $y-v$.

2. (*Деление с остатком и перебор остатков*)

а) Докажите, что если $7 \mid a^2+b^2$, то $7 \mid a$ и $7 \mid b$.

б) Решите в целых числах уравнение

$$3x=5y^2+4y-1.$$

3. (*Десятичная система счисления. Признаки делимости*)

а) В числе 65432789 вычеркнуть наименьшее число цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 36.

б) Докажите, что для того, чтобы число делилось на 7 необходимо и достаточно, чтобы разность между числом с отброшенной последней цифрой и удвоенной последней цифрой делилась на 7.

в) Число делится на 1998. Докажите, что если между любыми его цифрами вставить подряд три нуля, то вновь получившееся число тоже будет делиться на 1998.

г) Число $\frac{5}{17}$ обратили в бесконечную десятичную дробь, вычеркнули первую цифру после запятой и получившееся число обратили в обыкновенную дробь. Какая дробь получилась?

д) Докажите, что в последовательности $[2^n\sqrt{2}]$ имеется бесконечное множество чётных чисел.

4. (*Простые и составные числа. Разложение на множители. Применение метода индукции.*)

а) Доказать существование разложения натурального числа в произведение простых сомножителей.

б) Докажите, что если $(a,b)=1$, то существуют целые числа u и v такие, что $au+bv=1$.

в) Докажите следствия из предыдущей теоремы:

г) Если $c \mid ab, (c,a)=1$, то $c \mid b$.

д) Если $a \mid c, b \mid c, (a,b)=1$, то $ab \mid c$.

е) Докажите

ж) бесконечность множества простых чисел;

з) бесконечность множества простых чисел вида $4n-1$.

и) Найдите все простые числа p, q, r такие, что $p^q+q^p=r$.

к) Сколькими нулями оканчивается число 1000!?

л) Решите в целых числах уравнение $3\cdot 2^x+1=y^2$.

м) Докажите, что при любом натуральном n число

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

не является целым.

5. (*Теорема единственности разложения чисел в произведение простых сомножителей. Метод спуска.*)

а) Решите в целых числах уравнение $x^2+y^2+z^2=2xyz$.

б) Докажите, что уравнение $x^4+y^4=z^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Указание: Использовать вид решений уравнения Пифагора.

6. (*Применение принципа Дирихле.*)
а) Докажите, что если $(a, m) = 1$, то разрешимо сравнение

$$a^x \equiv 1 \pmod m.$$

б) Докажите, что если p — простое число, то разрешимо сравнение

$$1 + x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod p$$

в) Докажите, что разрешимо сравнение

$$\begin{cases} ax + by \equiv 0 \pmod m, \\ |x|, |y| \leq \sqrt{m}, \\ |x| + |y| \neq 0. \end{cases}$$

г) Пусть m — нечётное число, не кратное пяти. Докажите, что существует число, состоящее из одних единиц и делящееся на m.
7. (*Малая теорема Ферма*)
а) Докажите, что если p — простое число вида $4n + 3$ и $p \mid a^2 + b^2$, то $p \mid a$ и $p \mid b$.
б) Докажите, что если p — простое число, то число $(p-1)!$ делится на p (теорема Вильсона).
8. (*Рациональные и иррациональные числа*)
а) Докажите иррациональность чисел
б) $\sqrt[3]{9}$;
в) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$;
г) $\operatorname{tg} 1^\circ$.
д) Можно ли в вершинах клетчатой бумаги поместить вершины равностороннего треугольника?
е) Докажите, что $\sqrt[3]{2}$ не является корнем никакого квадратного уравнения с рациональными коэффициентами.
ж) Существуют ли рациональные числа x, y, z, u, удовлетворяющие уравнению

$$(x + y\sqrt{2})^2 + (u + v\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}?$$

з) Докажите, что при любых натуральных числах p и q выполняется неравенство

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{4q^2}.$$

9. (*Целая часть числа*)
а) Решите уравнения
б) $x^2 = [3x]$;
в) $[x] + [3x] + [5x] = 100$;
г) $x^2 - 5[x] + 4 = 0$
10. (*Применение формул*)
а) Докажите, что любое целое число можно представить в виде суммы кубов пяти целых чисел.
б) Докажите, что если $m^2 + mn + 9n^2$ делится на 35^2 $(m, n \in \mathbb{Z})$, то числа m и n делятся на 35.