# Графы.

*Составитель Мазин М. В.*

**Задача 1.** В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые - нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека все еще не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

**Задача 2.** В государстве 2000 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами так, что из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что это государство можно разбить на несколько республик (возможно, всего на одну) так, чтобы в каждой республике из любого города можно было единственным образом проехать в любой другой город этой республики, не выезжая за ее пределы. (В каждой республике должно быть не менее двух городов.)

**Задача 3.** Докажите, что в любой компании, состоящей из четного числа людей, найдутся два человека, у которых в этой компании четное число общих знакомых.

**Задача 4.** В Северной Балбесии 100 городов, некоторые из них соединены дорогами так, что из каждого города можно доехать до любого другого. При этом всего в Северной Балбесии 1000 дорог. Правительство хочет закрыть некоторые дороги (возможно, все) так, чтобы из каждого города выходило четное число оставшихся дорог (возможно, ни одной). Сколькими способами оно может это сделать?

*Комбинаторика (дополнительные задачи).*

**Задача 1.** Прямоугольник разбит на доминошки (то есть прямоугольники $1\times 2$). Докажите, что его клетки можно раскрасить в два цвета так, чтобы любая доминошка в этом разбиении содержала клетки разных цветов, но в любом другом разбиении этого прямоугольника на доминошки нашлась бы доминошка, содержащая две клетки одного цвета.

**Задача 2.** Вдоль улицы с односторонним движением расположенно $n$ мест для парковки автомобиля. На улицу въезжает последовательно $n$ автомобилей (с номерами от 1 до $n$ в порядке возрастания). Каждый водитель едет к своему любимому месту парковки и, если оно свободно, припарковывается; в противном случае он едет дальше до первой свободного места и припарковывается там. Если же места дальше заняты, он уезжает (насовсем). Последовательностью предпочтений назовем список $a_1, a_2, \ldots, a_n$ любимых мест парковки соответственно первого, второго,$\ldots$, $n-$го водителя. Сколько существует последовательностей предпочтений, для которых все водители сумеют припарковаться?