Элементы комбинаторной геометрии.

Составитель Кудряшов Ю. Г.

Вокруг теоремы Хелли.

Задача 1. a) На плоскости даны четыре выпуклые фигуры, причём любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда и все они имеют общую точку.
b) (теорема Хелли) На плоскости дано n выпуклых фигур, причём любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все n фигур имеют общую точку.
Задача 2. a) На плоскости дано n точек, причём любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что тогда все n точек можно накрыть кругом радиуса 1.
b) На плоскости дано n точек, причём расстояние между любыми двумя из них не превосходит единицы. Докажите, что все эти точки можно накрыть кругом радиуса $\sqrt{3}/3$.
Задача 3. На плоскости дано несколько параллельных отрезков, причём для любых трёх из них найдётся прямая. их пересекающая. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все отрезки.

Отрезки, точки, прямые,...

Задача 4. Докажите, что любой выпуклый многоугольник площади S можно поместить в прямоугольник площади $2S$.
Задача 5. На плоскости дано n точек, причём из любых четырёх какие-то три лежат на одной прямой. Докажите, что все точки кроме, может быть, одной лежат на одной прямой.
Задача 6. На плоскости дано n точек, причём из любых пяти какие-то три лежат на одной прямой.
a) При каких n из этого следует, что все точки кроме, может быть, двух, лежат на одной прямой.
b) При каких n из этого следует, что все точки лежат на двух прямых?
Задача 7. На плоскости даны $2n$ точек общего положения. Проведём на плоскости какую-нибудь прямую l и покрасим в красный цвет все точки, лежащие по одну сторону от этой прямой, а в синий цвет — все точки, лежащие по другую сторону от этой прямой. Сколько различных раскрасок можно получить таким образом?