ПРИМЕНЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

составитель А. Б. Скопенков

1. a) Выразите $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

b) Докажите, что $\cos n\varphi$ и $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ — многочлены от $\cos\varphi$.

2. Найдите: a) $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos k\varphi$; b) $\sum\limits_{k=0}^{n}2^k\sin k\varphi$;

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos k\varphi}{3^k}$. Указание: используйте, что $\cos k\varphi=\Re(\cos\varphi+i\sin\varphi)^k$.

3. Докажите:

a) $\operatorname{ctg}^2 x<\frac{1}{x^2}<\operatorname{ctg}^2 x+1$ (используйте $\sin x<x<\operatorname{tg} x$).

b) $\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{2n+1}{2j+1}\operatorname{ctg}^{2n-2j}\frac{\pi k}{2n+1}=0$ для любого $k=1,\dots,n$.

c) $\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi k}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$.

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

e*) Найдите $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}$, ...

4. a) Каким геометрическим преобразованием плоскости $\mathbb{C}$ получается число iz из числа z?

b) Каков геометрический смысл умножения на $e^{i\varphi}$? на $re^{i\varphi}$?

c) Выразите число w, полученное из числа z поворотом на угол φ против часовой стрелки относительно центра z_0 (через z, z_0 и φ).

d) Композиция поворотов плоскости (с различными центрами) — поворот или параллельный перенос.

5. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC', BCA' и CAB'. Пусть C_1, A_1, B_1 — их центры.

a) Пусть точки A, B, C соответствуют комплексным числам–координатам a, b, c соответственно. Найдите координаты точек A', B', C'.

b) На плоскости существует комплексная система координат, для которой A, B, C имеют координаты 0, 1, c соответственно.

c) Треугольник $A_1B_1C_1$ правильный;

d*) AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

e*) Останутся ли верными c) и d*), если строить правильные треугольники ABC', $AB'C$ и $A'BC$ во внутреннюю сторону?

6. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если $x_{n+1}=x_n\sqrt{\frac{x_n+x_{n-1}}{2x_{n-1}}}$ и a) $x_0=1$, $x_1=1/2$ b) $x_0=1$, $x_1=2$

7. Найдите $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, если $\begin{cases}x_{n+1}=3x_n-4y_n\\ y_{n+1}=3y_n+4x_n\end{cases}$ и a) $x_0=1$, $y_0=0$ b*) $x_0=1$, $y_0=2$

8. a) Разложите на квадратные трёхчлены с вещественными коэффициентами: x^4+3x^2+2, x^4+4, x^n-1.

b*) Многочлен с комплексными коэффициентами (то есть функция вида $f(z)=a_nz^n+\dots+a_0$, где $a_n,\dots,a_0\in\mathbb{C}$) всегда имеет комплексный корень. Примечание: эту задачу можно, не доказывая, использовать в других.

c) Многочлен с комплексными коэффициентами степени n (то есть $a_n\neq 0$) имеет ровно n корней (с учетом кратности).

d) Если обозначить эти корни через $z_1,\dots,z_n$, то $f(z)=a_n(z-z_1)\dots(z-z_n)$;

e) Любой многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с вещественными коэффициентами.

9. Найдите все многочлены с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие тождеству $P(x^2+x+1)\equiv P(x)P(x+1)$.

10. Если $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ и $\forall x\in\mathbb{R}\colon P(x)>0$, то $\exists Q(x),R(x)\in\mathbb{R}[x]\colon P=Q^2+R^2$.

11. Решите систему

$$\begin{cases}\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-5=\frac{\cos z}{\sin x\sin y}\\ \operatorname{ctg}y\operatorname{ctg}z+11=\frac{\cos x}{\sin y\sin z}\\ \operatorname{ctg}z\operatorname{ctg}x+7=\frac{\cos y}{\sin z\sin x}\end{cases}$$

(для знающих сферическую геометрию).