Классическая геометрия (11 класс).

Составитель Кожевников П. А.

1. Через вершину A треугольника ABC проведены прямые l_1 и l_2, симметричные относительно биссектрисы угла A. Докажите, что проекции точек B и C на l_1 и l_2 соответственно, середина стороны BC и основание высоты, опущенной из вершины A, лежат на одной окружности.

2. а) К двум непересекающимся окружностям проведены внутренняя общая касательная A_1B_1 и внешняя общая касательная A_2B_2. Докажите, что отрезки A_1A_2 и B_1B_2 имеют равные проекции на линию центров окружностей.

б) К двум сферам проведены две общие касательные A_1B_1 и A_2B_2. Докажите, что отрезки A_1A_2 и B_1B_2 имеют равные проекции на линию центров сфер.

3. Отрезок AB пересекает две равные окружности и параллелен их линии центров, причем все точки пересечения прямой AB с окружностями лежат между A и B. Через точку A проводятся касательные к окружности, ближайшей к A, через точку B — касательные к окружности, ближайшей к B. Оказалось, что эти четыре касательные образуют четырехугольник, содержащий внутри себя обе окружности. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

4. Две окружности в пространстве пересекаются в точке O. По этим окружностям из точки O начали двигаться с одинаковыми угловыми скоростями две блохи. Докажите, что прямая, соединяющая блох, всегда параллельна фиксированной плоскости.

Дополнительные задачи.

5. Точка O — середина оси прямого кругового цилиндра. A и B — диаметрально противоположные точки окружности нижнего основания цилиндра. C — некоторая точка окружности верхнего основания, не лежащая в плоскости OAB. Докажите, что сумма двугранных углов трехгранного угла $OABC$ (с вершиной O) равна 2π.

6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, а продолжения сторон AB и CD — в точке O. Через точку O проведены прямые l и m, параллельные AC и BD соответственно. Окружность (ACO) пересекает m второй раз в точке P, окружность (BDO) пересекает l второй раз в точке Q. Докажите, что P, Q, K лежат на одной прямой.

Комментарии к задачам и указания к решениям.

1. Для решения достаточно показать, что середина A_0 стороны BC равноудалена от проекций B' и C'. Это следует из равенства треугольников A_0B_0B' и $C'C_0A_0$ (B_0, C_0 — середины сторон A_0C_0, B_0A_0 соответственно).

Задача связана со следующим общим фактом. Пусть на сторонах треугольника ABC вне его построены треугольники AB_0C, BC_0A, CA_0B такие, что

i) сумма углов $\angle(\overrightarrow{B_0A}, \overrightarrow{B_0C})$, $\angle(\overrightarrow{C_0B}, \overrightarrow{C_0A})$ и $\angle(\overrightarrow{A_0C}, \overrightarrow{A_0B})$ кратна 2π (через $\angle(\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XZ})$ мы обозначаем угол (определенный с точностью по $2\pi n$), на который нужно повернуть вектор $\overrightarrow{XY}$), чтобы он стал сонаправленным с вектором $\overrightarrow{XZ}$)).

ii) $\frac{AB_0}{CB_0} \cdot \frac{CA_0}{BA_0} \cdot \frac{BC_0}{BA_0} = 1$.

Тогда углы треугольника $A_0B_0C_0$ не зависят от треугольника ABC и вычисляются как
$\angle(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0C_0}) = \angle(\overrightarrow{CB_0}, \overrightarrow{CA}) + \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC_0})$, $\angle(\overrightarrow{B_0C_0}, \overrightarrow{B_0A_0}) = \angle(\overrightarrow{AC_0}, \overrightarrow{AB}) + \angle(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA_0})$,
$\angle(\overrightarrow{C_0A_0}, \overrightarrow{A_0B_0}) = \angle(\overrightarrow{BA_0}, \overrightarrow{BC}) + \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_0})$.

Идея решения этой общей задачи состоит в следующем. Пусть R_A — поворотная гомотетия с центром в A_0, переводящая B в C, R_B — поворотная гомотетия с центром в B_0, переводящая C в A, Пусть R_C — поворотная гомотетия с центром в C_0, переводящая A в B. При выполнении условий i) и ii) композиция поворотных гомотетий R_A, R_B, R_C является тождественным преобразованием.

2. Радикальная ось делит пополам общую касательную.

3. Не нужно пользоваться критерием описанности. Проще понять, что точка пересечения двух биссектрис равноудалена от всех сторон.

Верно обобщение этой задачи для неравных окружностей и прямой AB, проходящей через точку пересечения внешних касательных к окружностям.

Другое решение получается из рассмотрения параллельного переноса, совмещающего окружности.

4. Удобный аппарат для установления этого факта — векторы. Можно ввести в плоскости каждой окружности “согласованные” базисы с началом координат в центрах окружностей.

5. $OABC$ можно достроить до равногранного тетраэдра.

6. Можно посчитать отношения отрезков на параллельных прямых. При подсчете полезна теорема о произведении длин отрезков секущих.