Классическая геометрия (9 класс).

Составитель Кожевников П. А.

1. Дан треугольник ABC. Двое играют в игру. Первый ставит точку X на стороне AB, затем второй ставит точку Y на стороне BC, затем первый ставит точку Z на стороне CA. Первый хочет, чтобы площадь треугольника XYZ была наибольшей, а второй хочет, чтобы площадь треугольника XYZ была наименьшей. Какой будет площадь треугольника XYZ при правильной игре обоих?

2. Дана "звездочка" $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5$ (см. рис.) Докажите, что $\min\{A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5\} \leq \max\{A_5B_1, A_1B_2, A_2B_3, A_3B_4, A_4B_5\}$.

3. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $60°$. Докажите, что биссектриса одного из углов, образованных высотами, проведенными из вершин B и C, проходит через центр описанной окружности.

4. К двум непересекающимся окружностям проведены внутренняя общая касательная A_1B_1 и внешняя общая касательная A_2B_2. Докажите, что отрезки A_1A_2 и B_1B_2 имеют равные проекции на линию центров окружностей.

5. Отрезок AB пересекает две равные окружности и параллелен их линии центров, причем все точки пересечения прямой AB с окружностями лежат между A и B. Через точку A проводятся касательные к окружности, ближайшей к A, через точку B — касательные к окружности, ближайшей к B. Оказалось, что эти четыре касательные образуют четырехугольник, содержащий внутри себя обе окружности. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Несколько известных геометрических сюжетов.

1. (высоты)

$AB'C'$ подобен ABC с коэффициентом $\cos A$.

$A'H$, $B'H$, $C'H$ — биссектрисы треугольника $A'B'C'$.

При отражении относительно стороны BC или относительно середины стороны BC точка H попадает на описанную окружность.

2. (биссектрисы и описанная окружность)

AA_1, BB_1, CC_1 — биссектрисы треугольника ABC и высоты треугольника $A_1B_1C_1$.

A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, CA, AB.

A_1 равноудалена от B, C, I (и центра вневписанной окружности I_A).

B_1C_1 делит AI пополам.

Диагонали шестиугольника в пересечении треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ проходят через точку I и параллельны сторонам ABC.

3. (вневписанная окружность)

$AY = AZ = p$.

$BA_0 = CX = (p - a)/2$.

I_AA — высота треугольника $I_AI_BI_C$.