Геометрическая интерпретация

составитель А. Б. Скопенков

Задача 1. a) Если $a, b, c, A, B, C > 0$ и $a + A = b + B = c + C = k$, то $aB + bC + cA \leqslant k^2$.

b) Если $0 \leqslant x_1, x_2, x_3, x_4 \leqslant 1$, то $0 \leqslant x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + x_3(1 - x_4) + x_4(1 - x_1) \leqslant 2$.

Задача 2. a) Найти наименьшее возможное значение выражения $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{z^2 + 9} + \sqrt{t^2 + 16}$ при условии $x + y + z + t = 17$.

b) Найти наименьший возможный периметр шестиугольного сечения куба.

c) Если $a, b, c > 0$, то $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.

d) Когда достигается равенство?

e) Пусть $x, y, z > 0$ и $\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + 2x + x^2 = 16 \end{cases}$. Найти $xy + 2yz + 3zx$.

f) Пусть $C = \sqrt{a^2 + b^2}$, $B = \sqrt{a^2 + c^2}$, $A = \sqrt{b^2 + c^2}$. Тогда

$$\sqrt{(A + B + C)(A + B - C)(A - B + C)(-A + B + C)} = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}.$$

Задача 3. a) Пусть $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_n = \sqrt{\frac{1 + a_{n-1}}{2}}$. Доказать: $\{a_n\}$ монотонна.

b) Из любых четырёх чисел можно выбрать два, для которых $0 \leqslant \frac{x - y}{1 + xy} \leqslant 1$.

c) Из любых трёх положительных чисел можно выбрать два, для которых $0 \leqslant \frac{x - y}{1 + x + y + 2xy} \leqslant 1/2$.

Задача 4. Если $0 < x < y < z < \pi/2$, то $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z < \sin x \cos y + \sin y \cos z + \sin z \cos x + \pi/2$.

Задача 5. Если $a, b, c > 0$, то $\sqrt{ab(a + b)} + \sqrt{bc(b + c)} + \sqrt{ca(c + a)} \geqslant \sqrt{(a + b)(b + c)(c + a)}$.