Инверсия

Составитель Спиридонов С. В.

Пусть на плоскости дана окружность S с центром O и радиусом R. *Инверсией относительно окружности* S называют преобразование, переводящее произвольную точку A, отличную от O, в точку A^*, лежащую на луче OA на расстоянии $OA^* = \frac{R^2}{OA}$ от точки O. Инверсию относительно S будем также называть *инверсией с центром* O *и степенью* R^2, а окружность S — *окружностью инверсии.*

1. (a) Во что переходят точки лежащие внутри, и вне S? Во что переходят прямые, проходящие через O?

(b) Докажите, что треугольник BOA подобен трегольнику A^*OB^*.

(c) Во что переходят прямые и окружности?

2. (*теорема Птолемея*) Дан 4-х угольник $ABCD$. Докажите, что $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$, причем равенство достигается, если $ABCD$ — вписанный.

3. Дана окружность ω и хорда AB. Две окружности касаются хорды и ω и пересекаются в точках C и D. Доказать, что CD делит дугу AB (противоположную той, которой касаются окружности) пополам.

4. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите множество их точек касания.

5. Даны 2 непересекающиеся окружности a и b. Две окружности c и d касаются их внешним образом и, кроме того, касаются в точке A. Найти ГМТ A.

Пусть две окружности пересекаются в точке A. *Углом между окружностями* называют угол между касательными к ним в точке A. (Ясно, что если окружности пересекаются в точках A и B, то угол между касательными в точке A равен углу между касательными в точке B.) Аналогично определяется угол между прямой и окружностью.

6. (a) Докажите, что инверсия сохраняет углы.

(b) Угол между обобщенными описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен тому же углу для треугольников ACD и BCD.

7. (a) Докажите, что две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 (или окружность и прямую) можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

(b) (*теорема Штейнера*) Докажите, что если существует цепочка окружностей S_1, S_2, ..., S_n, каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1, касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой, внешним и внутренним в противоположном случае), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей T_1,T_2, ..., T_n. (c) Докажите, что для двух непересекающихся окружностей R_1 и R_2 цепочка из n касающихся окружностей существует тогда и только тогда, когда угол между окружностями T_1 и T_2, касающимися R_1 и R_2 в точках их пересечения с прямой соеденяющей центры, равен целому кратному угла $360°/n$.

В дальнейшем рассматривается пространственная инверсия.

8*. Сфера с центром в плоскости основания ABC тетраэдра $SABC$ проходит через вершины A, B и C и вторично пересекает ребра SA, SB и SC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Плоскости, касающиеся сферы в точках A_1, B_1 и C_1, пересекаются в точке O. Докажите, что O - центр сферы, описаной около тетраэдра $SA_1B_1C_1$.

9*. Пусть ω — сфера единичного радиуса с центром в точке $E = (0, 0, 1)$. Рассмотрим отображение ω на плоскость $\alpha = \{z = 0\}$: точка A переходит в точку A^* пересечения луча NA и α, где $N(0, 0, 2)$ — точка, диаметрально противоположная точке касания ω и α. Доказать, что окружности (на сфере) данное преобразование переводит в обобщенные окружности.

10**. Можно ли замостить пространство окружностями, т.е. построить семейство окружностей $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in R}$, такое чтобы любая точка пространства лежала бы ровно на одной окружности семейства.

11***. Построить семейство непересекающихся окружностей равного радиуса, покрывающих куб со стороной 1.

12. Найти все плоские кривые, которые при инверсии с любым центром переходят в плоские кривые.