НЕРАВЕНСТВА

составитель А. Б. Скопенков

Все числа считаются неотрицательными (если не оговорено противное).

1. Паша пришел на физико-математическую олимпиаду, которая длится 6 часов. Баллы x и y за физику и математику – вещественные числа (не обязательно целые), равны затраченному на решение задач по данному предмету времени. Как Паше надо распределить время между физикой и математикой, чтобы получить наибольший (наименьший) результат, если этот результат вычисляется по формуле a) xy; b) $\ln x+\ln y$; c) x^2+y^2; d) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$;
e) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; f) $\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{y}{2}$; g)* x^2y; h) $2x^2+y^2$.
i) $f(x)+f(y)$, где $f''(x)\le 0$ при $x\in[0,6]$;
j) $af(x)+bf(y)$, где $a,b>0$ и $f''(x)\le 0$ при $x\in[0,6]$;

2.* Решите пункты a,c,d,e,g задачи 1 при условии, что Паша решает математику в два раза быстрее, чем физику.

3. Если $0\le y\le\frac{1}{n}\le x$, то $\frac{1}{n}(x+y-\frac{1}{n})\ge xy$.

4. Пусть $x_1+\ldots+x_n=1$. Найдите наибольшее и наименьшее значение следующих величин (не забудьте доказать все используемые Вами неравенства):
a) $x_1\cdot\ldots\cdot x_n$. b) $x_1^2+\ldots+x_n^2$. c) $\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}$. d) $\min\{x_1,\ldots,x_n\}$. e) $\max\{x_1,\ldots,x_n\}$. f)* $x_1^3+\ldots+x_n^3$. g)* $x_1^2\cdot\ldots\cdot x_{n-1}^2\cdot x_n$.

5*. Пусть $x_1\cdot\ldots\cdot x_n=1$. Найти наименьшее возможное значение величины $x_1+\dots+x_n$.

6. (неравенства о средних; ad hoc) $\min\{x_1\cdot\ldots\cdot x_n\}\le\frac{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}{n}\le\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\le\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\le\sqrt{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{n}}\le\max\{x_1,\ldots,x_n\}$.

7. (a) Если $a\ge b$ и $x\ge y$, то $ax+by\ge ay+bx$.
(b) Если $x_1\ge\ldots\ge x_n,\quad y_1\ge\ldots\ge y_n, \{i_1,\ldots,i_n\}=\{1,\ldots,n\}$, то $x_1y_1+\ldots+x_ny_n\ge x_1y_{i_1}+\ldots+x_ny_{i_n}$.
(c)* Если $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ — стороны и углы треугольника, то $a\alpha+b\beta+c\gamma\ge\frac{\pi}{3}(a+b+c)$.
(d)* *(неравенство Чебышева).* Если $x_1\ge\ldots\ge x_n,\quad y_1\ge\ldots\ge y_n$, то

$$\frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{n}\ge\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\cdot\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}\ge\frac{x_1y_n+\ldots+x_ny_1}{n}$$

.
(e)* $2\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\right)\le\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sin\alpha+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\sin\beta+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sin\gamma$.

8. a) $(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)\ge(x_1y_1+x_2y_2)^2$.
b) Найдите $\max\{x_1y_1\dots+x_ny_n\}$ при условии $x_1^2+\dots+x_n^2=y_1^2+\dots+y_n^2=1$.
c) (нер. Коши-Буняковского) $(x_1y_1+\dots+x_ny_n)^2\le(x_1^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+\dots+y_n^2)$.
d)* Выведите неравенства о средних из неравенства Коши-Буняковского.

9.* (a) Если для любого $t\quad at^2+2bt+c\ge0$, то $b^2\le ac$.
(b) $(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2\le(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)$.
(c) Если P, S, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — периметр, площадь и углы выпуклого n-угольника, то $4S\sum_{i=0}^n\operatorname{ctg}\frac{\alpha_i}{2}\ge P^2$.

10.* (a) $\dfrac{x^3+2y^{3/2}}{3}\ge xy$.
(b) *(неравенство Юнга)* Если $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то $xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}$.
(b) *(неравенство Гёльдера)* $x_1y_1+\ldots+x_ny_n\le(x_1^p+\ldots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}(y_1^q+\ldots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}$.
(c) *(неравенство Минковского)* $(\sum_{i=1}^n(x_iy_i)^p)^{\frac{1}{p}}\le(\sum_{i=1}^n x_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^n y_i^p)^{\frac{1}{p}}$.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX