Геометрия

Группа Y. 4.04.05

1. Докажите, что если стороны многоугольника или их продолжения пересечены прямой, то произведение отрезков сторон, не имеющих общих концов, равно произведению других отрезков. (*Теорема Карно*)

2. Докажите, что прямые, соединяющие какую-нибудь точку с вершинами многоугольника, имеющего нечетное число сторон, образуют на противоположных сторонах такие отрезки, что произведение отрезков сторон, не имеющих общих концов, равно произведению других отрезков. (*Теорема Понселе*)

3. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих чевиан, пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что середины трех диагоналей полного четырехсторонника лежат на одной прямой. (*Полным четырехсторонником* называется совокупность четырех прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку. Полный четырехсторонник имеет 6 вершин, 4 стороны и 3 диагонали.)(*Теорема Гаусса*)

5. Пусть A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 — изотомические точки сторон BC, CA и AB соответственно. Докажите, что треугольник, образованный прямыми A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 перспективен исходному треугольнику.

6. В остроугольном треугольнике ABC H — ортоцентр. Пусть A_1 — точка касания со стороной BC окружности, вписанной в треугольник BCH. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

7. Докажите, что треугольник Морлея перспективен исходному треугольнику. (*Треугольником Морлея* называется треугольник, образованный смежными трисектрисами углов треугольника.)

8. Пусть D, E, F точки на сторонах BC, CA, AB соответственно треугольника ABC, причем AD, BE, CF пересекаются в одной точке. Покажите, что если M, N, P, точки на EF, FD, DE соответственно, то прямые AM, BN, CP пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда DM, EN, FP пересекаются в одной точке.