Занятие 3. Комбинаторика

А.М. Райгородский

1. Докажите, что $C_n^s = C_{n-1}^s + C_{n-1}^{s-1}$.
2. Докажите, что $(C_s^0)^2 + \ldots + (C_s^s)^2 = C_{2s}^s$.
3. Пусть $s, t \in \mathbb{N}$, а $R(s,t)$ - такая функция, что $R(s,t) = R(t,s) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$, причем $R(s,1) = 1$. Докажите, что $R(s,t) \leq C_{s+t-2}^{s-1}$.
4. Докажите, что $R(s,s) \leq \frac{4^s}{10\sqrt{s}}$.

Определение. *Пусть $R(s,t)$ - это минимальное число n, для которого в любой раскраске ребер полного графа K_n на n вершинах в два цвета либо найдется полный подграф K_n на s вершинах, все ребра которого раскрашены в первый цвет, либо найдется полный подграф K_n на t вершинах, все ребра которого раскрашены во второй цвет.*

1. Чему равно $R(s,1)$? $R(s,2)$?
2. Докажите, что $R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$, а значит, $R(s,s) \leq \frac{4^s}{10\sqrt{s}}$.
3. Найдите $R(3,3)$.
4. Придумайте какую-нибудь нижнюю оценку на $R(s,s)$.

Определение. *Пусть $R = \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим какую-нибудь совокупность $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$, состоящую из различных k - сочетаний в R. Скажем, что $S \subseteq R$ является системой общих представителей (с.о.п.) для $\mathcal{M}$, если $S \bigcap M_j \neq \emptyset$ для любого $j \in \{1, \ldots, s\}$. Положим $\tau(\mathcal{M}) = \min\limits_S |S|$, где минимум берется по всем с.о.п. для $\mathcal{M}$.*

1. Докажите, что для любых n, k, s и любой совокупности $\mathcal{M}$ выполнена оценка $\tau(\mathcal{M}) \leq \min\{n, s\}$.
2. Докажите, что для любых n, k, s найдется такая совокупность $\mathcal{M}$, что $\tau(\mathcal{M}) \geq \max\left\{\left[\frac{n}{k}\right], s\right\}$.
3. Пусть $S \subset R$ и $|S| = l$. Как много существует совокупностей $\mathcal{M}$ с параметрами n, k, s, для которых S - с.о.п.?

Определение. *Пусть* $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} > 1$, *где* $p_1, \dots, p_s$ - *простые числа. Положим* $\mu(n) = 0$, *если существует* $k_i > 1$. *Иначе* $\mu(n) = (-1)^s$. *Наконец,* $\mu(1) = 1$. *Функция* $\mu(n)$ *называется функцией Мёбиуса.*

1. Найдите $\sum\limits_{d|n} \mu(d)$, где суммирование идет по всем делителям числа n.

2. Найдите $\sum\limits_{d|n}^{*} \mu(d)$, где суммирование идет по всем делителям числа n, в разложении которых четное число простых сомножителей.

3. (Формула обращения Мёбиуса) Пусть $f(n) = \sum\limits_{d|n} g(d)$. Тогда $g(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d) f(n/d)$. Докажите это.

4*. Пусть $\zeta(n) = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^n}$, а $M(n) = \sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{\mu(r)}{r^n}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$. Найдите $\zeta(n) M(n)$.