0. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. На меньшей дуге AC взята точка D. Доказать, что $BD = AD + DC$.

Ориентированные углы

Величиной ориентированного угла между прямыми AB и CD (обозначение $\angle(AB, CD)$) будем называть величину угла, на который нужно повернуть против часовой стрелки прямую AB так, чтобы она стала параллельна прямой CD. При этом углы, отличающиеся на $n \cdot 180°$, считаются равными. Следует отметить, что ориентированный угол между прямыми CD и AB не равен ориентированному углу между прямыми AB и CD (они составляют в сумме $180°$ или, что по нашему соглашению то же самое, $0°$).

Свойства ориентированных углов:

1. $\angle(AB, BC) = -\angle(BC, AB)$
2. $\angle(AB, CD) + \angle(CD, EF) = \angle(AB, EF)$
3. точки A, B, C, D, не лежащие на одной прямой, принадлежат одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$

Задачи

1. Окружность S касается окружностей S_1 и S_2 в точках A_1 и A_2, B — точка окружности S, а K_1 и K_2 — вторые точки пересечения прямых A_1B и A_2B с окружностями S_1 и S_2. Докажите, что если прямая K_1K_2 касается окружности S_1, то она касается и окружности S_2.

2. Четыре прямые образуют четыре треугольника. Доказать, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку.

3. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Пусть K — середина дуги BC, не содержащей точки A; N — середина отрезка AC; M — точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E. Докажите, что угол EMK прямой.

4. Дан остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H. H спроектировали на медиану BM и получили точку P. Доказать, что A, H, P и C лежат на одной окружности.

5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D. На отрезке BD выбрана точка K. $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{\angle AKD}{\angle DKC} = \dfrac{2}{1}$. Доказать, что $\angle AKD = \angle ABC$.

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB, ABC. Доказать, что $O_1O_2O_3O_4$ — прямоугольник.

7. Даны две окружности неравных радиусов, касающиеся внешним образом. В большую вписан равносторонний треугольник. Из каждой вершины треугольника проведено по касательной к другой окружности. Доказать, что длина одной из этих касательных равна сумме длин двух других.

8. Доказать, что вписанный четырехугольник $ABCD$ равен четырехугольнику $H_1H_2H_3H_4$, где H_1, H_2, H_3, H_4 — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC соответственно.

9. Дан треугольник ABC. Внутри треугольника расположены 3 окружности равных радиусов. Каждая окружность касается двух сторон треугольника, все окружности проходят через точку P. Доказать, что точка P лежит на прямой OI.