инверсия

1. Даны две касающихся окружности T_1 и T_2 и окружности $S_1, S_2, \ldots, S_n$ такие, что все S_i касаются T_1 и T_2, S_i касается S_{i+1} в точке A_i при $i \leqslant n-1$. Доказать, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ лежат на одной окружности.

2. Дан $\triangle ABC$. Вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Внутри треугольника ABC взята точка X так, что вписанная окружность $\triangle XBC$ касается отрезка BC в точке D и отрезков CX и XB в точках Y и Z соответственно.Доказать, что четырехугольник $EFZY$ вписанный.

Папп

3. Дан $\triangle ABC$. Окружность, проходящая через точки B и C, вторично пересекает стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Пусть H — ортоцентр $\triangle ABC$, H_1 — ортоцентр $\triangle AB_1C_1$. Доказать, что прямые BB_1, CC_1 и HH_1 пересекаются в одной точке.

Дезарг

4. Дан неравносторонний треугольник ABC, I — центр его вписанной окружности. Меньшая окружность, проходящая через точку I и касающаяся CA и CB, вторично пересекает меньшую окружность, проходящую через точку I и касающуюся BC и BA, в точке A'. Аналогично определяются точки B' и C'. Доказать, что центры описанных окружностей треугольников AIA', BIB' и CIC' лежат на одной прямой.

5. B и C — фиксированные точки некоторой окружности, A — переменная точка этой окружности. H — ортоцентр $\triangle ABC$, M — проекция H на биссектрису $\angle BAC$. Найти ГМТ точек M.

6. Окружность пересекает каждую сторону $\triangle ABC$ в двух точках. Пусть A_1 —точка пересечения касательных к окружности в точках ее пересечения с BC, аналогично определяются B_1 и C_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

7. Вписанная окружность касается сторон $\triangle ABC$ в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что прямая Эйлера $\triangle A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности $\triangle ABC$.

8. Доказать, что проекции точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника на две противоположные стороны симметричны относительно прямой, проходящей через середины двух других сторон.

9. H — ортоцентр $\triangle ABC$, H_1 и H_2 — его проекции на биссектрисы внутреннего и внешнего углов B. Доказать, что H_1H_2 делит AC пополам.

10. На высотах $\triangle ABC$ выбраны точки A_1, B_1, C_1 так, что они делят высоты в отношении $2:1$, считая от вершины. Доказать, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.