# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ВЫЕЗДНОЙ ШКОЛЫ
## Изогональное сопряжение и педальные окружности

**Определение.** Пусть дан треугольник $ABC$ и точка $P$. Треугольник, образованный проекциями $P$ на стороны $ABC$, называется *педальным треугольником*, а описанная вокруг него окружность *педальной окружностью* $P$ относительно $ABC$.

1. Пусть $A_1$, $B_1$, $C_1$ — проекции точки $P_1$ на $BC$, $CA$, $AB$, $A_2$, $B_2$, $C_2$ — вторые точки пересечения этих прямых с педальной окружностью $P_1$. Доказать, что перпендикуляры к $BC$, $CA$, $AB$, восставленные из $A_2$, $B_2$, $C_2$, пересекаются в одной точке $P_2$.

2. Доказать, что в условиях предыдущей задаче прямые $AP_1$ и $AP_2$, $BP_1$ и $BP_2$, $CP_1$ и $CP_2$ симметричны относительно биссектрис соответствующих углов $ABC$.

   **Определение.** Пусть дан треугольник $ABC$ и точка $P$. Прямые, симметричные $AP$, $BP$, $CP$ относительно биссектрис соответствующих углов $ABC$ пересекаются в одной точке (докажите!), которая называется *изогонально сопряженной* к $P$.

   Таким образом, было доказано

   **Утверждение.** Педальные окружности изогонально сопряженных точек совпадают.

3. Дан четырехугольник $ABCD$ и точка $P$. Рассмотрим прямые, симметричные $AP$, $BP$, $CP$, $DP$ относительно биссектрис соответствующих углов четырехугольника.

   а) Доказать, что, если три из этих прямых пересекаются в одной точке, то и четвертая проходит через эту точку.

   б) Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда проекции $P$ на стороны $ABCD$ лежат на одной окружности.

   в$^*$) Доказать, что для всех точек, удовлетворяющих условиям предыдущего пункта центры полученных окружностей лежат на одной прямой.

4. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые, симметричные $BD$ относительно биссектрис углов $B$ и $D$ не совпадают и пересекаются в точке $P$. Доказать, что $PA = PC$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ — вписанный. (IMO 2004)

5. В окружности проведены две параллельные хорды $AB$ и $CD$. Доказать, что проекции любой точки окружности на прямые $AC$, $BC$, $AD$, $BD$ лежат на одной окружности. (Устная геометрическая олимпиада 2004)

6. Дан эллипс с фокусами $F_1$, $F_2$. Касательные к нему в точках $X_1$, $X_2$ пересекаются в точке $P$. Доказать, что $\angle X_1PF_1 = \angle X_2PF_2$.

7. Доказать утверждение предыдущей задачи для гиперболы.

8. Сформулировать и доказать аналог этого утверждения для параболы.

9. Парабола касается прямых $AB$, $BC$, $CA$. Доказать, что фокус параболы лежит на описанной окружности треугольника $ABC$.

10. Найти геометрическое место проекций фокуса эллипса на касательные к нему.

11. Решить предыдущую задачу для гиперболы и параболы.