Комбинаторная геометрия.
группа X, 04.04.05

Задачи.

1. В длинном узком коридоре постелено несколько ковровых дорожек (т.е. на прямой расположено несколько отрезков). Известно, что любые две дорожки перекрываются. Докажите, что можно одним гвоздем прибить все эти дорожки к полу.

2. В коридоре постелено несколько ковровых дорожек, каждая дорожка длины 10 метров. Докажите, что в пол можно вбить несколько гвоздей так, чтобы каждая дорожка была прибита ровно одним гвоздем.

3. В коридоре постелено 50 ковровых дорожек. Докажите, что либо можно прибить одним гвоздем некоторые 8 дорожек, либо найдутся 8 попарно неперекрывающихся дорожек.

4. На прямоугольном столе разбросаны прямоугольные салфетки так, что их стороны параллельны краям стола. Докажите, что если любые две салфетки перекрываются, то их все можно прибить к столу одним гвоздем.

5. На прямоугольном столе разбросаны салфетки в форме равных квадратов так, что их стороны параллельны краям стола. Докажите, что можно вбить гвозди так, чтобы каждая салфетка оказалась прибитой ровно одним гвоздем.

6. На квадратном столе со стороной 1 разбросали как угодно салфетки в форме прямоугольников суммарного периметра больше 20. Докажите, что можно одной прямой пересечь по крайней мере 6 салфеток.

Дополнительные задачи.

1д. Коридор произвольным образом покрыли дорожками. Докажите, что некоторые дорожки можно убрать так, чтобы оставшиеся дорожки не перекрывались и покрывали не менее половины длины коридора.

2д. На столе площади 1 разбросали 100 салфеток произвольной формы общей площади больше 99. Докажите, что все салфетки можно прибить к столу одним гвоздем.

3д. На прямоугольном столе разбросаны салфетки в форме равных квадратов так, что их стороны параллельны краям стола. Докажите, что можно положить еще одну такую салфетку, перекрывающуюся бы по точке с каждым квадратом множества M.

4д. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более 10 хорд, то сумма длин хорд меньше 10π.

Решения, комментарии.

Задачи про ковровые дорожки представляют серию по “одномерной” геометрии. Но уже в этих задачах проявляется один из важных принципов при решении задач по комбинаторной геометрии — принцип “крайнего”. Примерами применения принципа “крайнего” являются рассуждения типа “рассмотрим самый левый конец отрезка”, “рассмотрим пару самых удаленных точек множества”, “рассмотрим наименьший угол между прямыми из данного множества прямых”, “рассмотрим треугольник наибольшей площади среди треугольников с вершинами в точках данного конечного множества”.

2. Конечно, для ковровых дорожек разной длины утверждение задачи неверно.