Комбинаторная геометрия.
группа Z, 04.04.05

Задачи.

1. В длинном узком коридоре постелено 50 ковровых дорожек (т.е. на прямой расположено 50 отрезков). Докажите, что либо можно прибить одним гвоздем некоторые 8 дорожек, либо найдутся 8 попарно неперекрывающихся дорожек.

2. Коридор произвольным образом покрыли дорожками (конечным числом).

   а) Докажите, что некоторые дорожки можно убрать так, чтобы оставшиеся дорожки не перекрывались и покрывали не менее половины длины коридора.

   б) От каждой дорожки отрезали левую или правую половину. Докажите, что оставшиеся половины покроют не менее трети коридора.

3. Каждый из семи ребят в воскресенье 3 раза катался на коньках на катке. Известно, что каждые двое из них в некоторый момент были на льду одновременно. Докажите, что в некоторый момент на льду оказались одновременно трое ребят.

4. На квадратном столе со стороной 1 разбросали как угодно салфетки в форме прямоугольников суммарного периметра больше 20. Докажите, что можно одной прямой пересечь по крайней мере 6 салфеток.

5. а) На прямоугольном столе разбросаны салфетки в форме равных квадратов так, что их стороны параллельны краям стола. Докажите, что можно вбить гвозди так, чтобы каждая салфетка оказалась прибитой ровно одним гвоздем.

   б) Останется ли утверждение задачи верным, если салфетки имеют форму равных кругов?

6. На столе размером 50×50 разбросаны а) 140; б) 150 салфеток размера 2×2. Докажите, что можно положить салфетку в форме круга радиуса 1, которая не будет перекрываться ни с одной из квадратных салфеток.

Указания и идеи решения.

1. *План решения 1.* Пусть A_iB_i — данные отрезки, и пусть B_1 имеет наименьшую координату среди всех B_i. Если найдется 7 отрезков, содержащих B_1, то вобьем гвоздь в B_1. Иначе таких отрезков не более 6. Все оставшиеся отрезки A_iB_i (их не меньше 50-7=43) не пересекаются с A_1B_1. Для этих отрезков продолжаем процесс.

   План решения 2. Рассмотрим системы из максимального количества попарно непересекающихся отрезков. Если в таких системах по 8 или более отрезков, то задача решена. Иначе возьмем среди всех таких систем систему отрезков с наименьшей суммой координат правых концов. Нетрудно показать, что вбив гвозди в правые концы этих отрезков, мы прибьем все отрезки. Один из гвоздей прибьет хотя бы 8 отрезков.

2. *План решения.* а) Проведем "причесывание" задачи. Если найдется отрезок, который покрыт объединением оставшихся, то выбросим его. Производим выбрасывания до тех пор, пока это возможно. Можно доказать, что после этого останется покрытие, являющееся объединением двух попарно непересекающихся систем отрезков.

   б) Пусть A и B — непересекающиеся системы из пункта а), $C = A \cap B$. Пусть $|A|, |B|, \ldots$ — суммарные длины отрезков множеств $A, B, \ldots$. Тогда $|A| + |B| - |C| = d$, где d — длина коридора. Пусть A', B' — множества A и B после отбрасывания половин отрезков. Тогда $A' \cap B' \subset C$. Отсюда вытекает оценка: $|A' \cup B'| \geq \max\{|A|/2, |B|/2, |A|/2 + |B|/2 - |C| = d - (|A|/2 + |B|/2)\}$.

3. *План решения.* Время пребывания на катке каждого из ребят — объединение A_i трех попарно непересекающихся отрезков на числовой оси t — итого у нас множество $E = \cup_{i=1}^{7} A_i$ из $3 \cdot 7 = 21$ отрезков на прямой. Множество V вершин всех этих отрезков состоит из 42 точек (можно вершины считать различными). Оценим число таких пар (e, v), для которых отрезок $e \in E$ содержит вершину $v \in V$ отрезка, отличного от e. Каждое пересечение $A_i \cap A_j$ дает хотя бы две такие пары. Тогда всего таких пар не меньше $2C_7^3 = 42$. Кроме того, самая левая вершина из E не входит ни в одну такую пару, поэтому некоторая вершина входит хотя бы в две пары, т.е. некоторый конец отрезка покрыт двумя другими отрезками. Этот конец отрезка соответствует искомому моменту времени.

Комментарий.

Задачи 1 — 3 дорожки представляют серию по “одномерной” геометрии. Но уже в этих задачах проявляется один из важных принципов при решении задач по комбинаторной геометрии — принцип “крайнего”. Примерами применения принципа “крайнего” являются рассуждения типа “рассмотрим самый левый конец отрезка”, “рассмотрим пару самых удаленных точек множества”, “рассмотрим наименьший угол между прямыми из данного конечного множества прямых”, “рассмотрим треугольник наибольшей площади среди треугольников с вершинами в точках данного конечного множества”.

Задачи 4 — 6 уже "двумерны". В задачах 4 и 5 оказывается полезна идея понижения размерности.