Теория чисел

Группа X. 4.04.05

1. Пусть $\pi(n)$ - произведение ненулевых цифр числа n. Найдите наибольший простой делитель числа $\pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(999)$.

2. Натуральные числа x и y таковы, что $xy|(x^2 + y^2 - x)$. Докажите, что x является квадратом натурального числа.

3. $c|a^b, a|b^c, b|c^a$. Докажите, что $abc|(a + b + c)^{a+b+c}$.

4. Имеет ли нетривиальное целое решение уравнение $x^2+y^2+z^2 = 7t^2$?

5. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0$ не имеет рациональных решений.

6. Произведение некоторых 48 натуральных чисел имеет ровно 6 простых делителей. Докажите, что можно из них выбрать 4 так, чтобы их произведение являлось квадратом.

7. Найдите все $m, n \in \mathbb{Z}$ такие, что $m + n^2 + d^3 = mnd$, где $d = (m, n)$.

Теория чисел

Группа X. 4.04.05

1. Пусть $\pi(n)$ - произведение ненулевых цифр числа n. Найдите наибольший простой делитель числа $\pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(999)$.

2. Натуральные числа x и y таковы, что $xy|(x^2 + y^2 - x)$. Докажите, что x является квадратом натурального числа.

3. $c|a^b, a|b^c, b|c^a$. Докажите, что $abc|(a + b + c)^{a+b+c}$.

4. Имеет ли нетривиальное целое решение уравнение $x^2+y^2+z^2 = 7t^2$?

5. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0$ не имеет рациональных решений.

6. Произведение некоторых 48 натуральных чисел имеет ровно 6 простых делителей. Докажите, что можно из них выбрать 4 так, чтобы их произведение являлось квадратом.

7. Найдите все $m, n \in \mathbb{Z}$ такие, что $m + n^2 + d^3 = mnd$, где $d = (m, n)$.