Занятие 2. Теория вероятностей и комбинаторная геометрия

А.М. Райгородский

1. *Определение схемы испытаний Бернулли.* Дана монета "со смещенным цетром тяжести": при случайном бросании монета падает на стол "решкой" кверху с вероятностью $p \in (0,1)$ и "орлом" кверху с вероятностью $q = 1 - p$. Бросаем монету на стол n раз. При каждом бросании записываем единицу, если выпала решка, и ноль в противном случае. Получается случайная последовательность ω нулей и единиц длины n. Ее вероятность - это $P(\omega) = p^{\mu}q^{n-\mu}$ (μ - число единиц в последовательности). Последовательность называем *элементарным событием*, а любой набор последовательностей - *событием*. Если B - событие, то его вероятность - это $P(B) = \sum\limits_{\omega \in B} P(\omega)$.

2. *Простейшие задачи на схему испытаний Бернулли.*

2.1. Найдите $P(\mu = k)$.

2.2. Пусть Ω - это множество всех возможных реализаций схемы (всех последовательностей из 0 и 1). Докажите, что $P(\Omega) = 1$.

2.3. Докажите свойства вероятности типа: $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$.

3. *Задачи о сочетаниях.*

3.1. Рассмотрим множество $R = \{1, \dots, n\}$ и будем производить последовательные испытания Бернулли. Если на ν - том шаге решка - вынимаем элемент ν из R. Иначе - не вынимаем. В результате получается множество A_1. Точно так же строим $A_2, \dots, A_m$. Найдите $P(A_i \bigcap A_j = \emptyset \;\; \forall\, i, j)$.

3.2. Найдите $P(|A_1 \bigcup \dots \bigcup A_m| = k)$.

3.3. Найдите $P(\forall\, i_1, \dots, i_r \;\; A_{i_1} \bigcap \dots \bigcap A_{i_r} = \emptyset)$ ($r \le m$ фиксировано).

3.4. Найдите $P(A_i \bigcap A_j \subseteq A_k \subseteq A_i \bigcup A_j)$ (i, j, k фиксированы).

4. *Определение случайной величины и ее математического ожидания.* *Случайная величина* - это произвольная функция $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Пусть ξ :

$\Omega \mapsto \{y_1, \ldots, y_k\}$. Тогда *математическое ожидание* ξ - это ее "взвешенное среднее" $M\xi = \sum\limits_{i=1}^{k} y_i P(\xi = y_i)$.

5. *Задачи о математическом ожидании.*

5.1. Найдите $M\mu$.

5.2. Докажите *линейность* математического ожидания: $M(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = c_1 M\xi_1 + c_2 M\xi_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, а ξ_i - случайные величины.

5.3. Докажите, что если $M\xi \leq x$, то существует $\omega \in \Omega$: $\xi(\omega) \leq x$.

6. *Задача комбинаторной геометрии.* Как много можно взять точек в $\mathbb{R}^n$, чтобы углы, образованные любыми тремя из них, были меньше $\frac{\pi}{2}$? Пусть $f(n)$ - это интересующий нас максимум. Последовательные факты:

6.1. Докажите, что $f(n) \leq 2^n$.

6.2. Докажите, что $f(n) \geq 2n - 1$.

6.3*. Докажите, что $f(n) \geq \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\right]$.

7. *Пошаговое решение задачи* 6.3*. Пусть $A_1, \ldots, A_{2m}$ - такие же множества, как в задаче 3.1 ($p = 0.5$). Им отвечают последовательности испытаний Бернулли $\omega_1, \ldots, \omega_{2m}$, которые можно интерпретировать как точки в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, углы, образованные любыми тремя из них, *не превосходят* $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, если мы избавимся от прямых углов, удалив из множества векторов $\omega_1, \ldots, \omega_{2m}$ "не слишком много" элементов, то мы получим "достаточно хорошую" нижнюю оценку на $f(n)$. Действуем:

7.1. Докажите, что тройка $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ образует прямой угол с вершиной в ω_k (в том числе и "вырожденный", т.е. некоторые из ω_ν совпадают, что возможно по построению) тогда и только тогда, когда $A_i \bigcap A_j \subseteq A_k \subseteq A_i \bigcup A_j$ (ср. задачу 3.4).

7.2. Пусть ξ - это число троек $\omega_i, \omega_j, \omega_k$, образующих прямой угол. Найдите $x = M\xi$, пользуясь результатами задач 3.4 и 5.2.

7.3. В силу 5.3 найдутся такие $\omega_1, \ldots, \omega_{2m}$, что среди них не больше, чем x, прямых углов. Выведите отсюда 6.3* за счет оптимального выбора $m = m(n)$.