Симметрические многочлены для 10-классников

Теорема Виета. Пусть для любых значений переменной t выполнено равенство

$$e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + \cdots + e_{n-1} t^{n-1} + e_n t^n = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t) \ldots (1 + x_n t). \tag{1}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&e_0 = 1\\
&e_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n\\
&e_2 = x_1 x_2 + \langle\text{все остальные произведения пар переменных } x_i\rangle\\
&\ldots\\
&e_k = x_1 x_2 \ldots x_k + \langle\text{все остальные произведения переменных } x_i\text{, взятых в количестве } k \text{ штук}\rangle\\
&\ldots\\
&e_n = x_1 x_2 \ldots x_n.
\end{aligned} \tag{2}$$

1. Докажите теорему Виета.
2. Многочлен $a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, $a_0 \neq 0$, имеет корни $x_1, \ldots, x_n$. Напишите многочлен, корни которого $1/x_1, \ldots, 1/x_n$.
Симметрические многочлены не меняют своего значения при любой перестановке входящих в них переменных. Примером симметрических многочленов служат входящие в (??) многочлены e_k. Они называются *элементарными симметрическими многочленами*.
Еще один пример симметрических многочленов: суммы степеней $p_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$.
3. Проверьте, что многочлен $(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ — симметрический.
Формулу (??) можно понимать так, что коэффициенты многочлена от одной переменной выражаются через его корни (= значения, в которых многочлен обращается в 0) с помощью элементарных симметрических многочленов. При этом нужно считать, что у многочлена степени n ровно n корней. Скажем, у многочлена $x^2 + 1$ два «корня». С такими «корнями» можно выполнять 4 арифметических действия, которые удовлетворяют привычным свойствам относительно *равенств*. Но их, вообще говоря, нельзя сравнивать по величине, так что когда речь пойдет о неравенствах, нужно быть осмотрительным.
4. Найдите произведение корней многочлена $x^4 - 2x^2 + 4$.
5. Найдите сумму квадратов корней многочлена $x^3 - 4x + 2$.
6. Докажите, что у многочлена $x^{10} - 2x^9 + 3x^8 - \cdots - 10x + 11$ не все корни действительные.
Основная теорема о симметрических многочленах утверждает, что *любой симметрический многочлен можно выразить через элементарные симметрические с помощью сложения и умножения*. В частности, любой симметрический многочлен от корней уравнения можно вычислить с помощью арифметических действий, зная только значения коэффициентов уравнения.
7. Докажите основную теорему о симметрических многочленах для многочленов от двух переменных x_1, x_2.
Тождества Ньютона связывают элементарные симметрические многочлены и суммы степеней:

$$n e_n = p_1 e_{n-1} - p_2 e_{n-2} + p_3 e_{n-3} - \cdots + (-1)^{r-1} p_r e_{n-r} + \cdots + (-1)^{n-1} p_n e_0. \tag{3}$$

Равенство (??) справедливо для любого числа переменных, при этом нужно считать, что $e_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при $k > n$.
8. Докажите, что если $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, то $p_3 = 3e_3$.
9. Докажите, что если число $x + x^{-1}$ — целое, то и все числа $x^k + x^{-k}$ — целые.
10. Докажите, что если $2(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2$, то треугольник со сторонами a, b, c — прямоугольный.
11. Выразите многочлен из задачи **??** через элементарные симметрические.
12. Выразите многочлен $(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2$ через элементарные симметрические.
Мономиальные симметрические многочлены m_λ определяются следующим образом. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ — набор целых неотрицательных чисел. Тогда m_λ равен сумме одночленов $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где последовательности показателей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ пробегают *все различные* перестановки последовательности λ. (В частности, все коэффициенты в m_λ равны 1.)
13. Проверьте, что $m_{(1^k)} = e_k$, $m_{(k)} = p_k$, где $(1^k) = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (k единиц), а $(k) = (k, 0, \ldots, 0)$.
14. Докажите, что многочлен (от нескольких переменных) тождественно равен 0 тогда и только тогда, когда коэффициенты при всех одночленах равны 0.
15. Докажите, что любой симметрический многочлен ***однозначно*** представляется в виде суммы мономиальных симметрических многочленов с числовыми коэффициентами.
16. Докажите тождества Ньютона.
17. Докажите, что для любого λ существует такое произведение элементарных симметрических многочленов, что в его разложении в сумму мономиальных многочленов многочлен m_λ входит с ненулевым коэффициентом.
18. Докажите основную теорему о симметрических многочленах.