Симметрические многочлены для 11-классников

Теорема Виета. Пусть для многочленов от переменной t выполнено равенство

$$e_0 + e_1 t + e_2 t^2 + \dots + e_{n-1} t^{n-1} + e_n t^n = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t) \dots (1 + x_n t). \tag{1}$$

Тогда

$$e_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} \tag{2}$$

1. Докажите теорему Виета.
2. Многочлен $a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$, $a_0 \neq 0$, имеет корни $x_1, \dots, x_n$. Напишите многочлен, корни которого $1/x_1, \dots, 1/x_n$.
Симметрические многочлены не меняют своего значения при любой перестановке входящих в них переменных. Примером симметрических многочленов служат входящие в (2) многочлены e_k. Они называются *элементарными симметрическими многочленами*.
Еще один пример симметрических многочленов: суммы степеней $p_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.
Формулу (1) можно понимать так, что коэффициенты многочлена от одной переменной выражаются через его корни (= значения, в которых многочлен обращается в 0) с помощью элементарных симметрических многочленов. При этом нужно считать, что у многочлена степени n ровно n корней. Скажем, у многочлена $x^2 + 1$ два «корня». С такими «корнями» можно выполнять 4 арифметических действия, которые удовлетворяют привычным свойствам относительно *равенств*. Но их, вообще говоря, нельзя сравнивать по величине, так что когда речь пойдет о неравенствах, нужно быть осмотрительным.
3. Найдите сумму обратных косинусов:

$$\frac{1}{\cos\frac{0\pi}{13}} + \frac{1}{\cos\frac{2\pi}{13}} + \frac{1}{\cos\frac{4\pi}{13}} + \dots + \frac{1}{\cos\frac{24\pi}{13}}$$

Основная теорема о симметрических многочленах утверждает, что *любой симметрический многочлен можно выразить через элементарные симметрические с помощью сложения и умножения*. В частности, любой симметрический многочлен от корней уравнения можно вычислить с помощью арифметических действий, зная только значения коэффициентов уравнения.
Тождества Ньютона связывают элементарные симметрические многочлены и суммы степеней:

$$n e_n = p_1 e_{n-1} - p_2 e_{n-2} + p_3 e_{n-3} - \dots + (-1)^{r-1} p_r e_{n-r} + \dots + (-1)^{n-1} p_n e_0. \tag{3}$$

Равенство (3) справедливо для любого числа переменных, при этом нужно считать, что $e_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ при $k > n$.
Мономиальные симметрические многочлены m_λ определяются следующим образом. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$ — набор целых неотрицательных чисел. Тогда m_λ равен сумме одночленов $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, где последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ показателей пробегают *все различные* перестановки последовательности λ. (В частности, все коэффициенты в m_λ равны 1.)
4. Проверьте, что $m_{(1^k)} = e_k$, $m_{(k)} = p_k$, где $(1^k) = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (k единиц), а $(k) = (k, 0, \dots, 0)$.
5. Докажите, что многочлен (от нескольких переменных) тождественно равен 0 тогда и только тогда, когда коэффициенты при всех одночленах равны 0.
6. Докажите, что любой симметрический многочлен ***однозначно*** представляется в виде суммы мономиальных симметрических многочленов с числовыми коэффициентами.
7. Докажите тождества Ньютона.
8. Докажите, что для любого λ существует такое произведение элементарных симметрических многочленов, что в его разложении в сумму мономиальных многочленов многочлен m_λ входит с ненулевым коэффициентом.
9. Докажите основную теорему о симметрических многочленах.
10. Выразите многочлен $(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2$ через элементарные симметрические.
Неравенства Мюрхеда. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Определим λ-среднее $M_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ как

$$M_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_\pi x_{\pi(1)}^{\lambda_1} x_{\pi(2)}^{\lambda_2} \dots x_{\pi(n)}^{\lambda_n}, \tag{4}$$

где сумма берется по всем перестановкам n индексов. Скажем, что последовательность λ мажорирует последовательность μ (обозначение $\lambda \succeq \mu$), если выполнены неравенства $\lambda_1 \geqslant \mu_1$, $\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant \mu_1 + \mu_2$, ..., $\lambda_1 + \dots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \dots + \mu_k$, ..., $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \mu_1 + \dots + \mu_n$.
Неравенства Мюрхеда утверждают, что $M_\lambda(x_1, \dots, x_n) \geqslant M_\mu(x_1, \dots, x_n)$ для всех неотрицательных $x_1, \dots, x_n$ тогда и только тогда, когда $\lambda \succeq \mu$.
11. Проверьте, что неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим следует из неравенств Мюрхеда.
12. Докажите неравенства Мюрхеда для двух переменных.
13. Элементарное преобразование последовательности $\dots \geqslant \lambda_i \geqslant \dots > \dots \geqslant \lambda_j \geqslant \dots$ состоит в переходе к последовательности $\dots \geqslant \lambda_i + a \geqslant \dots \geqslant \lambda_j - a \geqslant \dots$. Докажите, что если $\lambda \succeq \mu$, то λ может быть получена из μ конечной последовательностью элементарных преобразований.
14. Докажите неравенства Мюрхеда в общем случае.