Вероятностные доказательства

Составитель А. Шень.

Приведём несколько примеров, где существование объекта с теми или иными свойствами доказывается с помощью подсчёта вероятностей (хотя сами эти свойства не имеют к теории вероятностей никакого отношения). Начнём с совсем простой задачи:

1. Океан покрывает более половины поверхности Земли. Докажите, что можно найти две диаметрально противоположные точки, покрытые водой.

Решение. Возьмём на поверхности Земли случайную точку X. Вероятность, того, что она попадёт в океан, больше половины. Но и вероятность того, что точка $-X$ (диаметрально противоположная) попадёт в океан, ровно такая же. Значит, в сумме эти вероятности больше единицы, и два описанных события иногда происходят одновременно.

О вероятностях мы здесь говорим больше для красоты, то же самое рассуждение можно пересказать и без них. Пусть $W \subset S^2$ — часть сферы, покрытая водой; её площадь больше половины (площади сферы). Площадь множества $-W$ такая же, поэтому эти множества обязаны пересечься (в сумме их площадь больше площади сферы).

Иногда, однако, наглядное рассуждение с интуитивно понятными вероятностями формализовать не так просто.

2. Одна десятая площади сферы белая, остальные девять десятых — чёрные. Докажите, что можно вписать куб в эту сферу таким образом, чтобы все его восемь вершин пришлись на чёрные точки.

Решение. Впишем куб в сферу и повернём его случайным образом. Для каждой вершины вероятность того, что она попадёт в белую часть, составляет 1/10. Следовательно, вероятность события «хотя бы одна вершина попала в белую часть», не превосходит 8/10 (но может быть меньше, поскольку несколько вершин могут быть белыми одновременно). Значит, возможен и другой вариант, когда все вершины чёрные (и он имеет вероятность не меньше 0,2).

В чём тонкость в этом рассуждении? Мы предполагаем, что имеет смысл говорить о «случайном повороте» куба, и что при этом каждая вершина куба имеет равные шансы попасть в любую его точку (вероятность попасть в множество $X \subset S^2$ пропорциональна площади множества X). Аккуратно обосновать это не так просто: математики говорят о «существовании инвариантной меры на группе вращений» $SO(3)$. (Мы не будем говорить об этом под- робно, ограничившись наглядным представлением о случайном пово- роте.)

В этом примере язык теории вероятностей более по существу: если бы не он, зачем стали бы мы рассматривать инвариантную меру на $SO(3)$?

Следующий пример относится к теории графов. Мы хотим построить «двудольный граф» с некоторыми свойствами. Двудольный граф состоит из вершин, разбитых на два класса («левые» и «правые»), и рёбер, которые соединяют вершины разных классов (один конец ребра должен быть левым, другой — правым).

3. Докажите, что для любого n существует двудольный граф, в котором

(a) обе доли L и R (левая и правая) содержат по n вершин;

(b) каждая левая вершина соединена ребром не более чем с восемью правыми;

(c) любое множество $X \subset L$ в левой доле, содержащее не ме- нее половины вершин, имеет не менее $0{,}7n$ соседей в правой доле. (Соседи — вершины, соединённые ребром с какой-то вершиной из X.)

(Эти требования заимствованы из определения «экспандеров», которые играют важную роль в теории графов; константы выбраны так, чтобы вычисления были попроще.)

Решение. Для малых n такой граф строится тривиально (например, при $n \le 8$ можно просто соединить все вершины слева и справа), но в общем случае простого примера (да ещё с простым доказательством) не обнаружено.

Однако можно легко доказать существование таких графов с помощью вероятностного рассуждения. Возьмём n левых и n правых вершин. Для каждой левой вершины выберем случайно восемь вершин справа (последовательные выборы независимы, так что некоторые даже могут совпадать). Требования (a) и (b) при этом, очевидно, выполнены, и остаётся проверить лишь то, что (c) выполнено с положительной вероятностью.

Зафиксируем некоторое подмножество $X \subset L$, содержащее как минимум половину вершин, и некоторое подмножество $Y \subset R$, содержащее менее $0{,}7n$ вершин. Какова вероятность события «все соседи всех вершин из X принадлежат Y»?

Для каждой левой вершины в отдельности вероятность того, что все восемь её соседей попадут в Y, не превосходит $(0{,}7)^8$ (для каждого соседа это 0,8, а выборы независимы). Для разных вершин выбор соседей происходит независимо, так что вероятность указанного события не больше $\left(0{,}7^8\right)^{0{,}5n} = 0{,}7^{4n}$.

Множество X можно выбрать не более чем 2^n способами; то же самое и для Y. Поэтому событие «найдутся множества X и Y, для которых число элементов в X не больше $0{,}5n$, число элементов в Y меньше $0{,}7n$ и все соседи всех элементов X лежат в Y» имеет вероятность не более $2^n \times 2^n \times 0{,}7^{4n} = 0{,}98^{2n} < 1$. А это событие как раз и состоит в том, что условие (c) не выполнено. Что и требовалось доказать.

Все рассмотренные примеры следовали одной и той же схеме. Мы хотели доказать, что существует объект с некоторым свойством. Для этого мы рассматривали некоторый вероятностный процесс, и доказывали, что искомый объект появляется с положительной вероятностью.

Теперь немного усложним эту схему и воспользуемся таким фактом: если среднее значение (математическое ожидание) некоторой случайной величины ξ больше некоторого числа λ, то какие-то значения этой величины должны быть больше λ. (А как же иначе? если все значения не больше λ, то и среднее не больше λ.)

4. Из бумаги вырезана фигура площади 10. Докажите, что её можно так положить на клетчатую сетку (с единичной стороной квадрата), что она покроет не менее 10 узлов сетки.

Решение. Пусть дана произвольная фигура F. Будем класть её на плоскость случайным образом. При этом число покрытых узлов может быть различным, и мы возьмём среднее их число (или, как ещё говорят, математическое ожидание числа покрытых узлов).

Это среднее зависит от фигуры F; обозначим его $n(F)$. Заметим, что функция n, как говорят, «аддитивна»: это значит, что если фигуру F разрезать на две непересекающиеся части F_1 или F_2, то

$$n(F) = n(F_1) + n(F_2)$$

В самом деле, для любого конкретного положения фигуры на плоскости общее число покрытых узлов равно сумме числа узлов, покрытых частями F_1 и F_2. Остаётся заметить, что среднее суммы равно сумме средних.

Аналогичное свойство верно и для большего числа частей. Отсюда можно заключить, что $n(F)$ пропорционально площади фигуры: в самом деле, если резать фигуры на много одинаковых маленьких квадратиков, то и $n(F)$, и площадь будут пропорциональны числу квадратиков.

Чему равен коэффициент пропорциональности? Для больших фигур краевыми эффектами можно пренебречь и заметить, что $n(F)$ близко к площади фигуры F; значит, коэффициент пропорциональности равен единице и $n(F)$ равно площади фигуры F.

Для фигуры площади 10 среднее число покрытых точек равно 10, и, следовательно, по крайней мере в одном положении фигуры покрыто не менее 10 точек.

Аналогичное рассуждение показывает, что по крайней мере в одном положении фигуры покрыто не более 10 точек. (Можно ли утверждать, что всегда есть положение, при котором покрыто *ровно* 10 точек? Оказывается, что нет — это верно не для всех фигур.)

5. Выпуклый булыжник имеет площадь поверхности S. Покажите, что в солнечную погоду его можно повернуть так, чтобы его тень (на плоскости, перпендикулярной солнечным лучам) имела площадь не меньше $S/4$. (На других плоскостях тень будет даже больше.)

Решение. Подсчитаем среднее значение площади тени (математическое ожидание при случайной повороте камня).

Каждый участок тени соответствует двум участкам на поверхности камня (на солнечной и теневой сторонах; здесь используется выпуклость). Поэтому общая площадь тени вдвое меньше суммы площадей всех участков. Для каждого участка все направления света равновероятны, поэтому мы заключаем, что средняя площадь тени камня пропорциональна площади его поверхности (ведь средняя площадь тени участка не зависит от того, в какой камень этот участок входит).

Чтобы найти коэффициент пропорциональности, возьмём эталонный сферический камень. Он имеет площадь поверхности $4\pi r^2$ и отбрасывает тень площади πr^2 (всегда, а потому и в среднем). Значит, выпуклый камень площади S отбрасывает в среднем тень площади $S/4$. И потому есть положение, где тень не меньше $S/4$ (а также положение, где она не больше $S/4$).

Следующий пример — знаменитое доказательство теоремы Вейерштрасса о возможности равномерного приближения непрерывной функции многочленами, предложенное Сергеем Натановичем Бернштейном.

Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Теорема Вейерштрасса утверждает, что для любого положительного ε существует многочлен P, который отличается от f во всех точках отрезка $[0,1]$ не более чем на ε.

Вот как можно найти такой многочлен. Пусть p — действительное число на отрезке $[0,1]$. Зафиксируем некоторое натуральное n (которое впоследствии будет стремиться к бесконечности) и построим случайную величину ξ_p. Рассмотрим n независимых испытаний с вероятностью успеха p в каждом из них. Если число успехов оказалось равным k, то значение случайной величины равно $f(k/n)$.

Ключевое наблюдение: математическое ожидание ξ_p (как функция от p; мы обозначим её f_n) будет многочленом. (В самом деле, вероятность принять каждое из возможных значений $f(0), f(1/n), \ldots, f(1)$ есть многочлен от p.)

С другой стороны, $f_n(p)$ близко к $f(p)$, поскольку для любого p доля успехов k/n с большой вероятностью близка к p (здесь мы уже считаем n большим), и потому в большинстве случаев $f(k/n)$ близко к $f(p)$ (здесь мы пользуемся равномерной непрерывностью функции f).

Проделав эти оценки аккуратно (чего мы делать здесь не будем), можно указать n, начиная с которого f_n отклоняется от f не более чем на ε во всех точках $p \in [0,1]$.

Вот ещё две задачи, решаемые с помощью вероятностных соображений:

1. Дано множество S, содержащее 200 элементов. В нём выбраны подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_k$, причём ни одно из них не является частью (подмножеством) другого. (В частности, все S_i различны.) Докажите, что $k \le C_{200}^{100}$.

Решение. Будем строить растущее подмножество множества S, начав с пустого множества и на каждом шаге добавляя случайный новый элемент (из оставшихся). После 200 шагов мы получим всё множество S. Пусть $A \subset S$ — некоторое фиксированное подмножество; вероятность, что мы пройдём через A, то есть оно появится на одном из шагов. обозначим через $\Pr[A]$. Например, $\Pr[\emptyset] = \Pr[S] = 1$; для одноэлементных множеств эта вероятность равна $1/200$, поскольку на первом шаге все элементы S могут быть выбраны с равными вероятностями.

Более того, все множества A данного размера a равновероятны, и ровно одно из них встретится (в каждом конкретном случае), поэтому $\Pr[A] = 1/C_{200}^{a}$.

Рассмотрим теперь события «пройти через S_i» для всех $i = 1, \ldots, k$. Вероятность i-го такого события есть $1/C_{200}^{s_i}$, где s_i — число элементов в S_i, и не меньше $1/C_{200}^{100}$ (максимальный элемент в строке треугольника Паскаля находится посередине). С другой стороны, эти события несовместны (ведь ни одно из множеств S_i не является подмножеством другого). Поэтому сумма вероятностей не превосходит единицы, а каждая из k вероятностей не меньше $1/C_{200}^{100}$. Значит, $k \le C_{200}^{100}$.

Замечание. Можно изложить это рассуждение, и не говоря о вероятностях. А именно, будем рассматривать все перестановки $x_1, \ldots, x_{200}$ множества S и для каждого A рассматривать те из них, у которых первые $|A|$ элементов образуют множество A. Доля таких перестановок равна $1/C_{200}^{|A|}$ и не меньше $1/C_{200}^{100}$, а при $A = S_1, \ldots, S_k$ соответствующие классы не пересекаются.

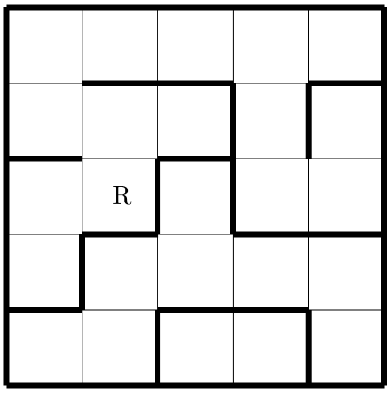

Рис. 1. Робот в лабиринте

2. Робот, расположенный в лабиринте с клетками и стенами между ними (как на рис. 1) исполняет программу. Эта программа представляет собой последовательность команд `вверх`, `вниз`, `влево`, `вправо` (нет ни циклов, ни ветвлений), которые Робот по очереди пытается выполнить (если это не удаётся из-за стены, команда пропускается). Покажите, что для любого n существует программа, которая обходит любой лабиринт в квадрате $n \times n$ (посещает все доступные клетки независимо от положения стен и начального положения Робота).

Решение. Покажем, что достаточно длинная случайная программа обладает этим свойством с положительной вероятностью. Пусть n фиксировано; тогда существует конечное число лабиринтов в квадрате $n \times n$ с заданным начальным положением робота.

Пусть фиксирован один из них (и начальное положение). Тогда существует программа размера $4n^3$, обходящая все доступные клетки (этих клеток не более n^2, а в каждую можно сходить туда и обратно за $4n$ шагов). Поэтому случайная программа длины $N = 4n^3$ сработает с вероятностью не менее $\varepsilon = (1/4)^{4n^3}$ (на каждом из шагов достаточно пойти в правильную сторону); вероятность неудачи будет не больше $(1 - \varepsilon)$.

Для программы размера $2N$ вероятность неудачи будет не больше $(1 - \varepsilon)^2$ (после неудачи на первых N шагах должна случиться ещё одна, уже с другим начальным положением. Аналогичное рассуждение показывает, что вероятность неудачи для программы размера kN не превосходит $(1-\varepsilon)^k$; при увеличении k эта вероятность стремится к нулю и при достаточно бóльших k становится меньше числа различных лабиринтов размера $n \times n$. Для таких k случайная программа с положительной вероятностью обслуживает все лабиринты, что и требовалось доказать.