Проективные преобразования

Составитель Спиридонов С. В.

Определение. Пусть α_1 и α_2 — две плоскости в пространстве, l — прямая, не параллельная ни одной из этих плоскостей. *Параллельным проектированием* плоскости α_1 на плоскость α_2 относительно направления l называют отображение, которое точке A плоскости α_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой l_2, параллельной l и проходящей через A, с плоскостью α_2.

1. a) Доказать, что параллельная проекция сохраняет отношение длин параллельных отрезков.

b) Параллельной проекцией можно перевести любой треугольник в правильный.

c) Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного данными прямыми, пересекаются в одной точке.

Определение. Пусть α_1 и α_2 — две плоскости в пространстве, O — точка, не лежащая ни на одной из этих плоскостей. *Центральным проектированием* плоскости α_1 на плоскость α_2 с центром O называют отображение, которое точке A_1 плоскости α_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой OA_1 с плоскостью α_2.

2. a) Через точку на боковом ребре четырёхугольной пирамиды проведите плоскость так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

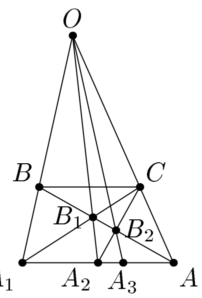
b) Центральным проектированием можно перевести любой выпуклый 4-угольник в параллелограмм.

3. (*теорема Паппа*) Точки C и C' лежат на прямых AB и $A'B'$, соответственно. Тогда три точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ лежат на одной прямой.

4. a) Диагонали и боковые стороны трапеции пересекаются в точках P и Q, соответственно. Тогда прямая PQ пересекает основания трапеции в их серединах.

b) Даны две параллельные прямые и точки A, B на одной из них. Постройте одной линейкой середину отрезка AB.

c) (*построение Брианшона*) На рисунке $BC \parallel A_1A$, $B_i = AB \cap A_iC$, $A_{i+1} = OB_i \cap A_1A$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Докажите, что $A_nA = \dfrac{1}{n}A_1A$.



d) При помощи одной линейки невозможно построить середину данного отрезка.

Определение. Отображение плоскости α на плоскость β будем называть *проективным отображением*, если оно является композицией центральных и параллельных проектирований, то есть существуют плоскости $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \beta$ и отображения P_i плоскостей α_i и α_{i+1}, каждое из которых является центральным или параллельным проектированием, причём P является их композицией. Если $\alpha = \beta$. то отображение будем называть *проективным преобразованием.*

5. Проективным преобразованием можно перевести любой выпуклый 4-угольник в квадрат.

6. Теорема Дезарга. Прямые a, b, c пересекаются в одной точке O. В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вершины A_1 и A_2 лежат на прямой a, B_1 и B_2 — на прямой b, C_1 и C_2 — на прямой c. A, B, C - точки пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2, A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой. а к

7*. a) Докажите, что существуют проективное преобразование, переводящее окружность в окружность, а данную точку (внутри окружности) — в центр образа.

b) Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее окружность в окружность, а данную прямую (не пересекающую окружности) — в бесконечно удаленную.

c) Прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходит через точку пересечения диагоналей.

d) *Диаметром* окружности ω относительно прямой l, не пересекающей ω, назовём отрезок, соединяющий 2 точки касания касательных к ω, опущенных из какой-либо точки на l. Докажите, что все диаметры пересекутся в одной точке C.

8. Пусть дана единичная окружность ω с центром в точке O. *Полярой* точки A назовем прямую, перпендикулярную OA и содержащую образ A при инверсии относительно ω.

a) Докажите, что если точка A лежит на поляре точки B, то точка B лежит на поляре точки A.

b) Докажите, что в задаче 7d прямая l является полярой к точке C.

9* a) *Двойное* (или *ангармоническое*) отношение $(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ сохраняется при проективных преобразованиях (длины берутся со знаком + или − в зависимости от направления соответствующих векторов: $AB = -BA$).

b) Пусть Q, R — точки пересечения прямых AD и BC, AC и BD на плоскости, K и L — точки пересечения прямых QR и AB, QR и CD. Тогда $(QRKL) = -1$.

10. (Обратная к теореме Дезарга) В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вершины A_1 и A_2 лежат на прямой a, B_1 и B_2 — на прямой b, C_1 и C_2 — на прямой c. A, B, C - точки пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2, A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Докажите, что прямые a, b, c пересекаются в одной точке O.

11. *Теорема Брианшона.* $ABCDEF$- описанный 6-иугольник. Доказать, что AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

12. *Теорема Паскаля.* $ABCDEF$- вписанный 6-иугольник. Пусть $X = AE \bigcap FB, Y = BD \bigcap CE$, $Z = AD \bigcap CF$. Докажите, что X, Y, Z лежат на одной прямой.