Стрельба из пушки по воробьям (применения теории множеств)

Составитель И. В Ященко.

Задача 1. Из города А в город Б ведут две дороги. Известно, что две телеги умудрились проехать из А в Б каждая по своей дороге так, что они ни разу не были дальше, чем в 10 м друг от друга (например, их связали веревкой). Из А в Б и из Б в А одновременно выехали два круглых воза, каждый диаметром 5 м. Могут ли они разъехаться?

Задача 2. На складе лежит n мешков, причем некоторые лежат в других. Сторож может вынуть все содержимое из какого-то мешка, и одновременно положить все мешки, которые лежат снаружи его внутрь. Сколько различных расположений он может получить из заданного начального положения?

Задача 3. Можно ли разбить

a) круг на непересекающиеся отрезки?

b) пространство на непересекающиеся окружности?

c) пространство на непересекающиеся гиперболы?

Задача 4. На географическую карту России положили географическую карту меньшего масштаба. Верно ли, что найдется точка России, изображения которой совпадут?

Задача 5. У бесконечного дерева все уровни конечны. Докажите, что существует сквозной путь сквозь это дерево.

Задача 6. Доказать, что производная функции на отрезке непрерывна хотя бы в одной точке этого отрезка.

Задача 7. У дифференцируемой функции на отрезке некоторая производная в каждой точке равна 0. Верно ли, что функция — многочлен?

Задача 8. a) Докажите, что множество бесконечных последовательностей нулей и единиц несчётно.

b) Докажите, что не существует программы, которая по любой другой программе определяет, остановится ли та или нет на данном входе.