# МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ВЫЕЗДНОЙ ШКОЛЫ

Приводимые ниже задачи предназначены для развития у школьников навыков решения геометрических задач. Отличительной особенностью многих из них является то, что они могут оказаться полезным инструментом для решения других задач, примеры которых также приведены в списке.

1. На сторонах $AB$, $BC$, $CA$ треугольника $ABC$ взяты точки $C'$, $A'$, $B'$. Доказать, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна $(AB' \cdot BC' \cdot CA' + AC' \cdot CB' \cdot BA')/4R$, где $R$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

2. Дан треугольник $ABC$. Для какой точки внутри него площадь чевианного треугольника[1] максимальна?

3. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. $M$, $N$ — середины диагоналей $AC$, $BD$. Доказать, что если углы $ABD$ и $CBM$ равны, то углы $BCN$ и $ACD$ также равны.

4. Стороны $AB$ и $CD$ четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $E$, $AD$ и $BC$ — в точке $F$. $A'B'C'D'$ — четырехугольник, симметричный $ABCD$ относительно $EF$. Доказать, что прямые $AC'$, $BD'$, $EF$ пересекаются в одной точке.

5. Какие следствия можно получить из предыдущей задачи, если четырехугольник $ABCD$

   а) вписанный;

   б)описанный?

6. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Выберем для любых двух из них одну из точек пересечения и проведем через три выбранных точки окружность (или прямую). Проведем окружность через три остальные точки пересечения и отметим точки пересечения двух построенных окружностей. В результате различного выбора точек пересечения данных окружностей может получиться до 8 отмеченных точек. Доказать, что все они лежат на одной окружности.

7. Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается его сторон в точках $A'$, $B'$, $C'$. $Q$ — середина $A'B'$. Доказать, что углы $B'C'C$ и $A'C'Q$ равны.

8. Дан треугольник $ABC$ и две изогонально сопряженные точки $P$, $Q$. Доказать, что проекции $P$ и $Q$ на стороны $ABC$ лежат на одной окружности.

9. Дан четырехугольник $ABCD$ и точка $P$. Рассмотрим прямые, симметричные $AP$, $BP$, $CP$, $DP$ относительно биссектрис соответствующих углов четырехугольника.

   а) Доказать, что, если три из этих прямых пересекаются в одной точке, то и четвертая проходит через эту точку.

[1] *Чевианным треугольником* точки $P$ относительно треугольника $ABC$ называется треугольник с вершинами в точках пересечения прямых $AP$ и $BC$, $BP$ и $CA$, $CP$ и $AB$.

б) Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда проекции $P$ на стороны $ABCD$ лежат на одной окружности.

в) Доказать, что для всех точек, удовлетворяющих условиям предыдущего пункта центры полученных окружностей лежат на одной прямой.

10. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые, симметричные $BD$ относительно биссектрис углов $B$ и $D$ не совпадают и пересекаются в точке $P$. Доказать, что $PA = PC$ тогда и только тогда, когда $ABCD$ — вписанный. (IMO 2004)

11. Дана гипербола $xy = 1$. Доказать, что

    а) для любых, лежащих на гиперболе точек $A$, $B$, $C$ ортоцентр треугольника $ABC$ также лежит на гиперболе, а его окружность 9 точек проходит через ее центр.

    б) для любых лежащих на гиперболе точек $A$, $B$, $C$, $D$ окружность, проходящая через точки пересечения прямых $AB$ и $CD$, $AC$ и $BD$, $AD$ и $BC$, и окружность, проходящая через проекции $D$ на $AB$, $BC$, $CA$, проходят через центр гиперболы.

12. Пусть $A_1$, $B_1$, $C_1$ — основания биссектрис треугольника $ABC$, $A_2$, $B_2$, $C_2$ — основания его высот, $C^*$, $B^*$, $A^*$ — точки пересечения прямых $A_1A_2$ и $B_1B_2$, $C_1C_2$ и $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$, $A'$, $B'$ — точки пересечения произвольной прямой, проходящей через $C^*$, с $BC$ и $AC$, соответственно. Доказать, что

    а) Прямые $A'B^*$, $B'A^*$ и $AB$ пересекаются в одной точке $C'$.

    б) Прямые $AA'$, $BB'$ и $CC'$ пересекаются в одной точке.

    в) Окружность, описанная около треугольника $A'B'C'$ проходит через точку Фейербаха треугольника $ABC$. (Л. А. и Т. Л. Емельяновы)

13. Пусть $O$, $I$ — центры описанной и вписанной окружностей треугольника $ABC$. Доказать, что для всех точек прямой $OI$ окружности, проходящие через их проекции на стороны $ABC$, имеют общую точку.