# Сочетания

**Теорема 1.** *Число всех $k$-элементных подмножеств множества из $n$ элементов равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Доказательство несложное и есть в любой книжке по комбинаторике.*

**Упражнение.** В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого $n$-угольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

*Решение.* Каждой точке пересечения двух диагоналей соответствуют четыре вершины $n$-угольника, а каждым четырём вершинам $n$-угольника соответствует одна точка пересечения (точка пересечения диагоналей четырехугольника с вершинами в данных четырёх точках). Поэтому число всех точек пересечения равно числу способов, которыми среди $n$ вершин можно выбрать четыре вершины:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

□

**Задача 1 (Шары и перегородки).** Пусть у нас есть $n$ одинаковых шаров и 25 ящиков, ящики пронумерованы. Сколькими способами можно разложить шары по ящикам так, чтобы не было пустых ящиков?

**Задача 2.** Найти число решений уравнения $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ в натуральных числах.

**Задача 3.** Найти число решений неравенства $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$ в целых неотрицательных числах.

**Задача 4*.** В классе изучают $2n$ предметов. Все ученики учатся на 4 и 5. Никакие 2 из них не учатся одинаково, ни о каких двух из них нельзя сказать, что один из них учится лучше другого (не бывает такого, что у первого по всем предметам оценки не хуже, чем у второго). Доказать, что число учеников в классе не превышает $C_{2n}^n$.

# Комбинаторные доказательства тождеств

**Упражнение.** Докажите комбинаторно тождества $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

**Задача 5.** Докажите тождество $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$.

**Задача 6.** Докажите тождество $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$.

**Задача 7.** Докажите тождество $\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot C_n^{n-k} = C_{2n}^n$.

**Задача 8.** Докажите тождество $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

**Задача 9.** Докажите тождество $\sum_{k=0}^n kC_n^k = n2^{n-1}$.

**Задача 10.** Докажите тождество $C_{n-2}^{k-2} + 2 \cdot C_{n-3}^{k-3} + \cdots + (n-k+1) \cdot C_{k-2}^{k-2} = C_n^k$.

# Метод траекторий

Для многих комбинаторных задач можно указать такую геометрическую интерпретацию, которая сводит задачу к подсчету числа путей (траекторий), обладающих определённым свойством.

**Пример 1.** Рассмотрим координатную сетку на плоскости $Oxy$. Тогда число различных кратчайших путей на этой сетке, ведущих из точки $(0,0)$ в точку $(m,n)$, равно $C_{m+n}^{m}$.

Действительно, каждый такой путь состоит из $m+n$ отрезков, причём среди них есть $m$ горизонтальных и $n$ вертикальных отрезков. Разные пути отличаются лишь порядком чередования горизонтальных и вертикальных отрезков. Поэтому общее число путей равно числу способов, которыми из $m+n$ отрезков можно выбрать $n$ вертикальных отрезков, то есть $C_{m+n}^{m}$.

**Упражнение.** С помощью метода траекторий докажите равенство $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

**Задача 11 (числа Каталана).** Возле кассы собралось $2n$ человек, причём $n$ из них имеют монеты достоинством 50 коп., а другие $n$ имеют лишь по рублю. Сначала в кассе нет денег, билет стоит 50 коп. Сколько всего имеется способов размещения $2n$ покупателей в очереди так, чтобы ни один покупатель не ждал сдачи?

*Решение.* Каждому способу размещения покупателей в очереди сопоставим ломаную $A_0A_1\dots A_{2n}$, ведущую из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$, следующим образом. Для каждого $k$ $A_k=(k,a_k)$. Число $a_k$ равно количеству пятидесятикопеечных монет, оставшихся в кассе после ухода $k$-го покупателя. $A_0=(0,0)$. Если у $k$-го покупателя монета в 1 р., то $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}=(1,-1)$, если же у $k$-го покупателя монета в 50 к., то $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}=(1,1)$. Условие, что ни один покупатель не должен ждать сдачи, означает, что ломаная не имеет общих точек с прямой $y=-1$. Ясно, как любой такой траектории сопоставить очередь, в которой ни один покупатель не будет ждать сдачи.

Найдём число траекторий, пересекающих прямую $y=-1$, а потом вычтем это число из общего числа траекторий, ведущих из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$.

Поставим в соответствие каждой траектории $T$, пересекающей прямую $y=-1$ или имеющей с ней общую точку, новую траекторию $T'$ по следующему правилу: до первой точки пересечения с прямой $y=-1$ траектория $T'$ совпадает с $T$, а далее $T'$ является симметричным образом траектории $T$ относительно прямой $y=-1$. Все траектории $T'$ заканчиваются в точке $A'_{2n}=(2n,-2)$, являющейся симметричным образом точки $A$ относительно прямой $y=-1$. Установленное соответствие является взаимно однозначным, поэтому число траекторий, пересекающих прямую $y=-1$, равно числу ломаных, соединяющих точки $O$ и $A'_{2n}$ .Это число, очевидно, равно $C_{2n}^{n-1}$ . Тогда искомое число траекторий равно $C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$. □

## Разные задачи

**Задача 12.** a) Доказать, что среди любых шести лиц найдутся или трое знакомых, или трое незнакомых. b) Если 17 учёных переписываются друг с другом по трём различным научным темам, причём каждая пара учёных ведёт переписку лишь по одной теме, то всегда найдутся трое учёных, переписывающихся по одной и той же теме. Доказать. c*) Пусть $a_n$ — последовательность натуральных чисел, образованная по следующему закону:

$$a_1=2, a_{n+1}=(n+1)a_n+1.$$

Предположим, что имеется $a_n+1$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две точки соединены отрезком одного из $n$ цветов. Доказать, что существует треугольник с вершинами в данных точках, стороны которого имеют один и тот же цвет.

**Задача 13.** На плоскости проведено $n$ прямых так, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. a) Найти количество точек пересечения этих прямых. b) На сколько частей делят плоскость эти прямые?

**Задача 14*.** В пространстве проведено $n$ плоскостей общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну прямую, никакие четыре не проходят через одну точку). На сколько частей делят пространство эти плоскости?