Элементы геометрии треугольника.
“Бронза”. Занятие 2. 7 апреля 2006

Задача 1. Охарактеризуйте все треугольники, у которых перпендикуляры к сторонам, восставленные в точках их пересечения с биссектрисами противоположных углов, пересекаются в одной точке.

Задача 2. Пусть $A_1B_1C_1$ – ортотреугольник треугольника ABC, A_2, B_2, C_2 – проекции вершин A, B, C на прямые B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 соответственно. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A_2, B_2, C_2 на прямые BC, CA, AB соответственно пересекаются в одной точки.

Задача 3. Верно ли, что площадь ортотреугольника не превосходит площади серединного треугольника ?

Задача 4. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A', B', C'. Докажите, что $S_{AC'BA'CB'} \geq 2S_{ABC}$.

Задача 5. Даны две окружности и число $k \neq 0$. Найдите геометрическое место точек плоскости, для которых отношение степеней до двух данных окружностей равно k.

Задача 6. В вершинах треугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что центр описанной окружности треугольника, образованного этими тремя касательными, лежит на прямой Эйлера исходного треугольника.

Задача 7. Дан остоугольный треугольник ABC. Докажите, что прямая Симпсона середины дуги AB описанной окружности, содержащей вершину C, делит периметр треугольника пополам.

Задача 8. Найти точку P внутри данного треугольника, для которой сумма отношений длин сторон треугольника к расстояниям от P до этих сторон минимальна.

Задача 9. Пусть a, b, c – расстояния от произвольной точки внутри треугольника до его вершин, а x, y, z – расстояния от нее до сторон треугольника. Докажите, что $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Задача 10. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка M. Докажите, что один из углов $\angle MAB, \angle MBC, \angle MCA$ не превосходит $30°$. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для четырехугольника.