Группа бронзы, алгебра, составитель А. Ефимов

Определение 1. Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ называется мультипликативной, если $f(mn) = f(m)f(n)$ при любых взаимно простых $m, n \in \mathbb{N}$.

Обозначения. p обозначает простое число; $a|b$ значит a делит b; $\tau(n)$ — количество делителей числа n; $\sigma(n)$ — сумма делителей числа n; $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел, не превосходящих n, взаимно простых с n (функция Эйлера).

1. Доказать, что
а) функции $\tau(n)$, $\sigma(n)$, мультипликативны;
б) функция $\varphi(n)$ мультипликативна;
в) функция $g(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \text{НОД}(k, n)$ мультипликативна
и найти явное выражение всех 4 функций через разложение на простые множители.

2. Определим функцию (Мебиуса) $\mu(n)$ следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } p^2|n \\ (-1)^k, & \text{если } n = p_1 \dots p_k, \text{ где } p_i \text{ — простые и различные}, k \geqslant 0 \end{cases}$$

Найти а) $\sum\limits_{d|n} \mu(d)$; б) $\sum\limits_{d|n} \varphi(d)$.

3. Пусть $F(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$. Доказать, что
а) если функция $f(n)$ мультипликативна, то и функция $F(n)$ мультипликативна;
б) если функция $F(n)$ мультипликативна, то и функция $f(n)$ мультипликативна;
в) Доказать, что $f(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d) F(\frac{n}{d})$.

4. Найти а) $\sum\limits_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{2^n - 1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n - 1}$.

5. Выразить а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\tau(n)}{n^s}$ через $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ при $s > 1$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sigma(n)}{n^{s+1}}$ через $\zeta(s)$, $\zeta(s+1)$;
доказать, что в) $\zeta(s) = \prod\limits_p \dfrac{1}{1 - p^{-s}}$; г) при $s > 2$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi(n)}{n^s} = \prod\limits_p \dfrac{p^s - 1}{p^s - p}$.

6. Пусть X — множество всех натуральных чисел, представимых в виде n^k, где n, $k > 1$. Найти $\sum\limits_{x \in X} \frac{1}{x-1}$.

7 (**целозначные многочлены**). Многочлен называется целозначным, если он в целых точках принимает целые значения.
а) Доказать, что многочлен $P(t)$ степени n целозначен тогда и только тогда, когда он представим в виде $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k C_t^k$, где все a_k целые, $C_t^k = \dfrac{t(t-1)\dots(t-k+1)}{k!}$;
б) то же самое, только вместо C_t^k берем C_{t+k}^n;
в) доказать, что для того, чтобы многочлен n-й степени был целозначным, достаточно, чтобы он в каких-нибудь $(n+1)$ последовательных целых точках принимал целые значения;
г) доказать, что если целочисленная последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям
(i) $(m-n)|(a_m - a_n)$ при $m > n$;
(ii) $|a_n| < C \cdot n^k$ при всех n для некоторых C и k,
то найдется целозначный многочлен $P(t)$, такой, что $P(n) = a_n$ при всех $n \geqslant 1$;