Сумма Минковского

Многие задачи из этого списка имеют трехмерные аналоги. Когда эти аналоги не совсем очевидны, они вынесены в отдельные пункты. При отсутствии желания их можно не решать.

Если задача, помеченная значком †, достаточно долго не решается, то к ней можно попросить подсказку.

Каждую точку плоскости $\mathbb{R}^2$ мы всегда воспринимаем также как ее радиус-вектор. Поэтому для любых точек a, b определены такие понятия, как $a+b$, $2a$, $-3a+5b$ и т.д.

Определение 1. *Суммой Минковского* множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Обычно сокращают: $A+x = A+\{x\}$, $A-x = A+\{-x\}$, $-A = 0-A$.

Упражнение 1. Чему равна сумма Минковского множества и точки? двух разнонаправленных отрезков? квадрата и круга?

Упражнение 2. Докажите, что сумма выпуклых фигур выпукла.

Определение 2. Пусть a — граничная точка множества A. Прямая α, проходящая через a, называется *опорной прямой* к A в точке a, если множество A полностью лежит в одной из полуплоскостей, определяемых прямой α.

Упражнение 3 (для тех, кому неизвестно). а) Мнооугольник A выпукл тогда и только тогда, когда для любой граничной точки a существует опорная прямая, проходящая через a.

б) Пусть A выпукл. Тогда для любой точки $x \notin A$ существует опорная прямая, относительно которой A и x лежат в разных полуплоскостях.

Упражнение 4. а) Докажите, что если c — граничная точка фигуры $A+B$ и $c = a+b$, $a \in A$, $b \in B$, то a и b — граничные точки множеств A и B соответственно.

б) Более того, если α — опорная прямая к $A+B$ в точке c, то прямые, параллельные α и проходящие через a и b (то есть прямые $\alpha+a-c$ и $\alpha+b-c$) являются опорными к A и B.

Упражнение 5. Докажите, что сумма Минковского выпуклых многоугольников — тоже выпуклый многоугольник.

В дальнейшем буквами A, B, M обозначаются выпуклые многоугольники.

Определение 3. Через $d(M)$ будем обозначать диаметр многоугольника M, через $p(M)$ и $s(M)$ — его периметр и площадь соответственно.

Задача 6. Докажите, что $p(A+B) = p(A)+p(B)$.

Задача 7. а) Докажите, что $d(A+B) \leq d(A)+d(B)$.

б) Докажите, что $d(A+(-A)) = 2d(A)$.

Задача 8. а) Пусть один выпуклый многоугольник находится внутри другого. Докажите, что периметр внутреннего меньше.

б)† Докажите, что $\pi d(M) \geq p(M)$. (*Подсказка. Докажите это неравенство сначала для центрально-симметричных многоугольников.*)

в)* Что можно сказать про трехмерные аналоги этих утверждений?

При решении следующих задач можно применять следующую теорему. А можно и доказать…

Принцип Кавальери. Пусть для (выпуклых) многоугольников M_1, M_2 при сечении их любой прямой, параллельной данной, отрезок, получающийся при сечении M_1, не больше отрезка, получающегося из M_2. Тогда площадь первого многоугольника не превосходит площади второго.

Задача 9. а)† Докажите, что $s(M+(-M)) \geq 4s(M)$. (*Подсказка. Оцените* $s(\frac{M+(-M)}{2})$.)

б) Сформулируйте и докажите аналогичный факт для объемов многогранников.

Задача 10. Докажите, что $4s(M) \leq \pi d(M)^2$.

Задача 11. а) Докажите, что $\sqrt{s(A+B)} \geq \sqrt{s(A)} + \sqrt{s(B)}$. (**Указание.** Докажите эту формулу сначала для прямоугольников с параллельными сторонами.)

б) Сформулируйте и докажите аналогичный факт для объемов многогранников.

Задача 12. а) Пусть B_t — круг с центром в начале координат и радиусом t. Докажите, что для всякого выпуклого многоугольника M функция

$$f(t) = s(M+B_t)$$

является квадратным трехчленом от t. Чему равны коэффициенты этого трехчлена?

б) Сформулируйте и докажите аналогичный факт для объемов многогранников. Что служит коэффициентами многочлена в этом случае?

Задача 13 (Изопериметрическая задача). С помощью предыдущей задачи докажите, что $4\pi s(M) \leq p(M)^2$.

Задача 14. Два сечения выпуклого многогранника параллельными плоскостями имеют равные площади. Докажите, что любое сечение плоскостью, параллельной данным и лежащей между ними, имеет не меньшую площадь.