**Занятие по арифметике №1. Группа Бронзы.**

*Дискретность натурального ряда. Подсчет показателей.*
*Мультипликативные задачи. Суммы квадратов. Ряды Фарея.*

1. Решите в целых числах уравнение $a(a+1) = b(b+2)$.

2. Решите в натуральных числах $2^y + y^2 = 2^x - x^2$.

3. Решите в целых числах уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$.

4. Целые числа $a$, $b$ и $c$ таковы, что $ab + bc + ca = 0$. Докажите, что число $abc$ может быть представлено в виде произведения квадрата целого числа на куб целого числа.

5. Натуральные числа $a$, $b$ и $c$ таковы, что $\frac{ab}{a-b} = c$. Известно также, что числа $a$, $b$ и $c$ не имеют общего для них всех натурального делителя, большего 1. Докажите, что $a - b$ есть точный квадрат.

6. Докажите, что число $n!$

а) не делится на $2^n$;

б) не делится на $p^n$ ни при каком простом $p$.

7. Докажите, что для любых неотрицательных целых чисел $m$ и $n$ число $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ – целое.

8. а) $2^n - 2$ делится на $n$. Докажите, что $2^{2^n-1} - 2$ делится на $2^n - 1$.

б) последовательность натуральных чисел $\{a_k\}$ определена рекуррентно: $a_1$ – простое, $a_k = 2^{a_k - 1} - 1$. Докажите, что $2^{a_k} - 2$ делится на $a_k$ при всех натуральных $k$.

9. $a$, $b$, $c$, $d$ – натуральные числа, $ab = cd$.

а) Докажите, что существуют натуральные числа $u_1$, $v_1$, $u_2$, $v_2$, для которых $a = u_1v_1$, $b = u_2v_2$, $c = u_1u_2$, $d = v_1v_2$.

б) Докажите, что число $a + b + c + d$ – составное.

10. Натуральные числа $x$, $y$, $z$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что

а) $xyz$ делится на 60;

б) если $(x, y, z)$ – *примитивное решение* (т.е. $(x, y, z) = 1$), то для некоторых натуральных $u$ и $v$ разной четности, $u > v$, $(u, v) = 1$, либо $x = u^2 - v^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2$, либо $x = 2uv, y = u^2 - v^2, z = u^2 + v^2$.

11. Докажите, что простое число не может двумя различными способами представляться в виде суммы двух квадратов.

12. Пусть $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ – три рациональных дроби, $be - af = 1$. Докажите, что $d \geqslant b + f$.

13. **Определение.** *Ряд Фарея* $\Phi_n$ – последовательность расположенных по возрастанию несократимых дробей $\frac{a}{b}$ с $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$.

*Медианта* дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

а) Докажите, что ряд $\Phi_n$ получается из ряда $\Phi_{n-1}$ вставкой медиант между соседними дробями с суммой знаменателей $n$.

б) Докажите, что для двух дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, стоящих рядом в каком-нибудь ряду Фарея, $|ad - bc| = 1$.

14. Докажите, что уравнение $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ не имеет решений в целых числах, отличных от 0.