Группа стали
Геометрия
16.04.06 Первое занятие, А.Гаврилюк

1. Докажите, что
а)если A - полюс a, то a - поляра A
б)если полюс a лежит на b, то полюс b лежит на a
в)Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про поляры

2. Даны положительные углы α_1, α_2 такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$. Докажите, что если для положительных углов β_1, β_2 верно $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ и $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$, то $\beta_1 = \alpha_1,\ \beta_2 = \alpha_2$.

3. В окружность вписан выпуклый шестиугольник, с длинами сторон a, b, c, d, e, f (идущими в таком порядке). Докажите, что его главные диагонали пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполнено равенство: $\frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = 1$

3. Дана окружность ω и точка X вне её. Из X проведены касательные XA, XB (точки A, B лежат на ω). Докажите, что прямая AB - поляра для X относительно ω.

4. Дана окружность ω и точка X вне её. Из X проведены прямые, пересекающие ω в точках A, B и C, D соответственно. O - точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что O лежит на поляре точки X.

5. Даны окружность ω и прямая l, не имеющие общих точек. Из точки X, которая движется по прямой l, проводятся касательные XA, XB к ω. Докажите, что все хорды AB имеют общую точку.

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Известно, что касательные к ω в точках A, C пересекаются на прямой BD. Докажите, что касательные к ω в точках B, D пересекаются на прямой AC.

7. Окружности ω_1, ω_2 пересекаются в точках A, B, причём центр O окружности ω_1 лежит на ω_2. Через точку O проводится прямая, пересекающая отрезок AB в точке P, а ω_2 - в C. Докажите, что P лежит на поляре C относительно ω_1.

8. Из точки A проведены касательные AB и AC к окружности и секущая, пересекающая окружность в точках D, E. M - середина отрезка BC. Докажите:
а)$BM^2 = DM \cdot ME$
б)$\angle DME = 2\angle DBE$ или $\angle DME = 2\angle DCE$
в)$\angle BEM = \angle DEC$

9. A_1, B_1, C_1 - точки касания вписанной окружности с соответственными сторонами треугольника ABC. Из M -середины AC к вписанной окружности проведена вторая касательная MK. l - прямая, параллельная AC и проходящая через B. Докажите, что прямые MK, l, A_1C_1 пересекаются в одной точке.