Линейность над $\mathbb{Z}_2$

Группа Стали, Кудряшов Ю. Г., 07.04.06

Есть табло с n лампочками и k выключателей. При переключении каждого выключателя некоторый набор лампочек (свой для каждого выключателя) меняет состояние.

Задача 1. Докажите, что число состояний лампочек, которые можно получить из некоторого начального, есть степень двойки.

Назовём *инвариантом* такой набор лампочек, что каждый выключатель меняет состояние чётного числа лампочек из этого набора.

Задача 2. Докажите, что число инвариантов есть степень двойки.

Задача 3. Докажите, что произведение числа инвариантов на число состояний, которые можно получить из некоторого начального, есть 2^n.

Задача 4. Лампочки расположены в виде прямоугольника $m \times n$. Для каждой лампочки есть выключатель, который переключает «крест» с пересечением в этой лампочке.

(a) При каких m, n из любого состояния лампочек можно получить любое другое?

(b) Найдите число состояний, которые можно получить из некоторого начального.

Назовём *соотношением* такой набор выключателей, что после переключения всех выключателей этого набора состояние всех лампочек остаётся прежним.

Задача 5. Докажите, что число соотношений есть степень двойки.

Задача 6. Докажите, что произведение числа соотношений на число состояний, которые можно получить из некоторого начального, есть 2^k.