Метод усреднения

1. а) Даны два набора векторов на плоскости $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$, причём сумма длин проекций векторов первого набора на любую прямую не больше суммы длин проекций векторов второго набора на ту же прямую. Докажите, что сумма длин векторов первого набора не больше суммы длин векторов второго набора.

б) Чему равно среднее значение длины проекции вектора на прямую? (Вектор и прямая лежат в фиксированной плоскости).

2. Докажите, что если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внутреннего многоугольника не превосходит периметра внешнего.

3. Сумма длин нескольких векторов на плоскости равна L. Докажите, что из этих векторов можно выбрать некоторое число векторов (может быть, только один) так, что длина их суммы будет не меньше L/π.

4. Докажите, что если длины всех сторон и диагоналей выпуклого многоугольника меньше d, то его периметр меньше πd.

5. На плоскости даны четыре вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, сумма которых равна нулю. Докажите, что

$$|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{d}| \geqslant |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}| + |\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}| + |\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}|.$$

6. Внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ взята точка O так, что $\overrightarrow{OA_1} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$. Пусть $d = OA_1 + \cdots + OA_n$. Докажите, что периметр многоугольника не меньше $4d/n$ при чётном n и не меньше $4dn/(n^2 - 1)$ при нечётном n.

7. Длина проекции замкнутой выпуклой кривой на любую прямую равна 1. Докажите, что её длина равна π.

8. Дано несколько выпуклых многоугольников, причём нельзя провести прямую так, чтобы она не пересекала ни одного многоугольника и по обе стороны от неё лежал хотя бы один многоугольник. Докажите, что эти многоугольники можно заключить в многоугольник, периметр которого не превосходит суммы их периметров.

9. а) Сформулируйте и решите аналог задачи 1 для векторов в пространстве.

б) Чему равно среднее значение длины проекции вектора на прямую в этом случае?

10. Докажите, что если один выпуклый многогранник расположен внутри другого выпуклого многогранника, то площадь поверхности внутреннего многогранника меньше площади поверхности внешнего многогранника.

11. Докажите, что если площадь любой проекции выпуклого многогранника не превосходит 1, то площадь его поверхности не превосходит 4.

12. Пусть в пространстве даны векторы $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_n$, сумма длин которых равна L. Докажите, что среди них можно выбрать несколько векторов, длина суммы которых не меньше $L/4$.

13. Пусть один тетраэдр расположен внутри другого тетраэдра. Докажите, что тогда отношение суммы длин ребер внутреннего тетраэдра к сумме длин ребер внешнего тетраэдра не превосходит 4/3, причем это отношение может быть сколь угодно близко к 4/3. (В частности, сумма длин ребер внутреннего тетраэдра может быть больше суммы длин ребер внешнего тетраэдра.)

14. Пусть многогранник с m вершинами расположен внутри многогранника с n вершинами. Докажите, что тогда отношение суммы попарных расстояний между вершинами внутреннего многогранника к сумме попарных расстояний между вершинами внешнего многогранника не превосходит $\dfrac{m^2}{4(n-1)}$ при четном m и $\dfrac{m^2-1}{4(n-1)}$ при нечетном m.

Метод усреднения (решения)

1. Введём систему координат Oxy. Пусть l_φ — прямая, проходящая через точку O и образующая угол φ $(0 < \varphi < \pi)$ с осью Ox, т.е. если точка A лежит на l_φ и вторая координата точки A положительна, то $\angle AOx = \varphi$; $l_0 = l_\pi = Ox$.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ образует угол α с осью Ox (угол отсчитывается против часовой стрелки от оси Ox к вектору $\boldsymbol{a}$), то длина проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую l_φ равна $|\boldsymbol{a}| \cdot |\cos(\varphi - \alpha)|$. Интеграл $\int\limits_0^\pi |\boldsymbol{a}| \cdot |\cos(\varphi-\alpha)|\, d\varphi = 2|\boldsymbol{a}|$ не зависит от α.

Пусть векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ образуют с осью Ox углы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Тогда по условию $|\boldsymbol{a}_1| \cdot |\cos(\varphi - \alpha_1)| + \cdots + |\boldsymbol{a}_n| \cdot |\cos(\varphi - \alpha_n)| \leqslant |\boldsymbol{b}_1| \cdot |\cos(\varphi - \beta_1)| + \cdots + |\boldsymbol{b}_m| \cdot |\cos(\varphi - \beta_m)|$ для любого угла φ. Интегрируя эти неравенства по φ от 0 до π, получаем $|\boldsymbol{a}_1| + \cdots + |\boldsymbol{a}_n| \leqslant |\boldsymbol{b}_1| + \cdots + |\boldsymbol{b}_m|$.

Величину $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называют *средним значением* функции f на отрезке $[a, b]$. Равенство

$$\int\limits_0^\pi |\boldsymbol{a}| \cdot |\cos(\varphi - \alpha)|\, d\varphi = 2|\boldsymbol{a}|$$

означает, что среднее значение длины проекции вектора $\boldsymbol{a}$ равно $2|\boldsymbol{a}|/\pi$, точнее говоря, среднее значение функции $f(\varphi)$, равной длине проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на прямую l_φ, на отрезке $[0, \pi]$ равно $2|\boldsymbol{a}|/\pi$.

2. Сумма длин проекций сторон выпуклого многоугольника на любую прямую равна удвоенной длине проекции многоугольника на эту прямую. Поэтому сумма длин проекций векторов сторон на любую прямую для внутреннего многоугольника не больше, чем для внешнего. Следовательно, сумма длин векторов сторон, т.е. периметр, у внутреннего многоугольника не больше, чем у внешнего.

3. Если сумма длин векторов равна L, то среднее значение суммы длин проекций этих векторов равно $2L/\pi$.

Функция f на отрезке $[a, b]$ не может быть всюду меньше своего среднего значения c, так как иначе

$$c = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx < \frac{(b-a)c}{b-a} = c.$$

Поэтому найдётся такая прямая l, что сумма длин проекций исходных векторов на неё не меньше $2L/\pi$.

Зададим на прямой l направление. Тогда либо сумма длин положительных проекций на это направление, либо сумма длин отрицательных проекций не меньше L/π. Поэтому либо длина суммы векторов, дающих положительные проекции, либо длина суммы векторов, дающих отрицательные проекции, не меньше L/π.

4. Обозначим проекцию многоугольника на прямую l через AB. Ясно, что точки A и B являются проекциями некоторых вершин A_1 и B_1 многоугольника. Поэтому $A_1B_1 \geqslant AB$, т.е. длина проекции многоугольника не больше A_1B_1, а $A_1B_1 < d$ по условию. Так как сумма длин проекций сторон многоугольника на прямую l равна $2AB$, она не превосходит $2d$.

Среднее значение суммы длин проекций сторон равно $2P/\pi$, где P — периметр. Среднее значение не превосходит максимального, следовательно, $2P/\pi < 2d$, т.е. $P < \pi d$.

5. Неравенство $|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{c}| + |\boldsymbol{d}| \geqslant |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d}| + |\boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}| + |\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}|$ достаточно доказать для проекций векторов на прямую, т.е. можно считать, что $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ — векторы, параллельные одной прямой, т.е. просто числа, причём $a+b+c+d = 0$. Будем считать, что $d \geqslant 0$, так как иначе можно изменить знаки у всех чисел.

Можно считать, что $a \leqslant b \leqslant c$. Нужно разобрать три случая: 1) $a, b, c \leqslant 0$; 2) $a \leqslant 0$ и $b, c \geqslant 0$ и 3) $a, b \leqslant 0$, $c \geqslant 0$. Все возникающие неравенства проверяются достаточно просто. При разборе третьего случая нужно отдельно рассмотреть случаи $|d| \leqslant |b|$, $|b| \leqslant |d| \leqslant |a|$ и $|a| \leqslant |d|$ (в последнем случае нужно учесть, что $|d| = |a| + |b| - |c| \leqslant |a| + |b|$).

6. Неравенство достаточно доказать для проекций векторов на любую прямую. Пусть проекции векторов $\overrightarrow{OA_1}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$ на прямую l равны (с учётом знака) $a_1, \dots, a_n$. Разобьём числа $a_1, \dots, a_n$ на две группы: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k \geqslant 0$ и $y'_1 \leqslant y'_2 \leqslant \ldots \leqslant y'_{n-k} \leqslant 0$. Пусть $y_i = -y'_i$. Тогда $x_1 + \dots + x_k = y_1 + \dots + y_{n-k} = a$, а значит, $x_1 \geqslant a/k$ и $y_1 \geqslant a/(n-k)$. Периметру в проекции соответствует число $2(x_1+y_1)$. Сумме длин векторов $\overrightarrow{OA_i}$ в проекции соответствует число $x_1+\dots+x_k+y_1+\dots+y_{n-k} = 2a$. А так как

$$\frac{2(x_1+y_1)}{x_1+\dots+y_{n-k}} \geqslant \frac{2}{2a}\Big(\frac{a}{k}+\frac{a}{n-k}\Big) = \frac{n}{k(n-k)},$$

то остаётся заметить, что величина $k(n-k)$ максимальна при $k = n/2$ для чётного n и при $k = (n \pm 1)/2$ для нечётного n.

7. Длина кривой — предел периметров вписанных в неё многоугольников. Рассмотрим вписанный многоугольник с периметром P и длиной проекции на прямую l, равной d_l. Пусть $1 - \varepsilon < d_l < 1$ для всех прямых l. Многоугольник можно подобрать так, чтобы ε было сколь угодно мало. Так как многоугольник выпуклый, то сумма длин проекций сторон многоугольника на прямую l равна $2d_l$.

Среднее значение величины $2d_l$ равно $2P/\pi$, поэтому $2 - 2\varepsilon < 2P/\pi < 2$, т.е. $\pi - \pi\varepsilon < P < \pi$. Устремляя ε к нулю, получаем, что длина кривой равна π.

8. Докажем, что периметр выпуклой оболочки всех вершин данных многоугольников не превосходит суммы их периметров. Для этого достаточно заметить, что по условию проекции данных многоугольников на любую прямую покрывают проекцию выпуклой оболочки.

9. К вычислению среднего значения длины проекции вектора можно подойти и по-другому. Этот новый подход интересен для нас тем, что таким же способом можно будет вычислить и среднее значение длины проекции вектора в пространстве. Пусть на плоскости каждому углу φ сопоставлено число $f(\varphi)$. Тогда среднее значение функции f равно $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$. Геометрический смысл этого интеграла следующий. Фиксируем на плоскости точку O и сопоставим каждому углу φ конец X единичного вектора $\overrightarrow{OX}$, направление которого соответствует углу φ. В результате каждому углу φ будет соответствовать точка окружности с центром O, причем разность двух углов будет равна длине соответствующей дуги. Разобьем окружность на мелкие дуги и рассмотрим сумму $\sum_k f(\varphi_k)\Delta l_k$, где φ_k — некоторая точка k-й дуги, Δl_k — длина этой дуги. При измельчении разбиения эта сумма стремится к $\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$. Чтобы получить среднее значение функции f, этот интеграл нужно разделить на длину окружности, т. е. на 2π.

Теперь можно аналогичным образом определить среднее значение длины проекции вектора в пространстве. Фиксируем в пространстве точку O и сопоставим каждому направлению в пространстве конец X единичного вектора $\overrightarrow{OX}$, соответствующего этому направлению. В результате получим сферу радиуса 1 с центром O. Интересующая нас функция f равна длине проекции вектора $\overrightarrow{a}$ на луч OX. Чтобы определить ее среднее значение, нужно разбить сферу на достаточно мелкие области и рассмотреть сумму $\sum_k f(X_k)\Delta S_k$, где X_k — точка k-й области, ΔS_k — площадь этой области. Затем нужно вычислить предел таких сумм при измельчении разбиения и поделить этот предел на площадь поверхности сферы, т. е. на 4π. Вместо разбиения сферы на мелкие области можно также рассматривать выпуклые многогранники, достаточно хорошо приближающие данную сферу. При этом можно считать, что для грани M_k точка X_k определяется как конец вектора $\overrightarrow{OX}_k$, перпендикулярного M_k. В таком случае $f(X_k) = a\Delta S_k|\cos\varphi_k|$, где ΔS_k — площадь грани M_k, φ_k — угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{OX}_k$. Легко проверить, что $\Delta S_k|\cos\varphi_k| = \Delta S'_k$, где $\Delta S'_k$ — площадь проекции грани M_k на плоскость, ортогональную вектору $\overrightarrow{a}$. Таким образом, рассматриваемая сумма $\sum_k f(X_k)\Delta S_k$ равна сумме площадей проекций граней многогранника на плоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{a}$. В пределе эта сумма равна удвоенной площади сечения сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. Таким образом, среднее значение длины проекции вектора $\overrightarrow{a}$ на прямые в пространстве равно $2aS_1/S_2$, где S_1 — площадь экваториального сечения сферы, S_2 — площадь поверхности сферы. Для сферы единичного радиуса $S_1 = \pi$ и $S_2 = 4\pi$, поэтому среднее значение равно $a/2$.

14. Докажем, что если на отрезке длиной d расположено k точек, причем концы отрезка входят в эту систему k точек. Тогда минимальная сумма попарных расстояний между данными точками равна $(k-1)d$, а максимальная сумма попарных расстояний между точками равна $k^2d/4$ при четном k и $(k^2-1)d/4$ при нечетном k.

Пусть A и B — концы рассматриваемого отрезка. Для любой точки X этого отрезка выполняется равенство $AX+BX=d$, поэтому сумма попарных расстояний между данными точками равна $(k-1)d+\Sigma$, где Σ — сумма попарных расстояний для системы из $k-2$ точек, которая получается из данной системы точек после выбрасывания точек A и B. Минимальное значение Σ равно 0; оно достигается в том случае, когда все $k-2$ точки сосредоточены в одном из концов отрезка AB. Максимальное значение Σ может получиться лишь в том случае, когда в новую систему из $k-2$ точек входят обе точки A и B (мы предполагаем, что $k-2\geqslant 2$). Снова выбросим точки A и B и рассмотрим систему из $k-4$ точек и т. д. В итоге получаем, что если $k=2s$, то сумма попарных расстояний максимальна в том случае, когда s точек расположены в одном конце отрезка и s точек расположены в другом конце отрезка; эта сумма равна $s^2d=k^2d/4$. Если же $k=2s+1$, то в одном конце отрезка должно быть расположено s точек, а в другом $s+1$ точка; в этом случае сумма равна $s(s+1)d=(k^2-1)d/4$.