Занятие 1 09.04.06 по построениям. Группа Стали.

1) На окружности две точки A и B зафиксированы,а точка M пробегает всю окружность. Из середины K отрезка MB опускается перпендикуляр KP на прямую MA. Докажите, что все прямые KP проходят через одну точку.

2) Из середины M основания AC равнобедренного треугольника ABC опущен перпендикуляр MH на сторону BC. Точка P — середина отрезка MH. Докажите, что AH перпендикулярно BP.

3) Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке K. Докажите, что прямая, соединяющая середину стороны AC с центром вписанной окружности, делит отрезок BK пополам.

4) Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения медиан треугольников AOB и COD перпендикулярна прямой, проходящей через точки пересечения высот треугольников BOC и AOD.

5) Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.

6)а) В остроугольном треугольнике ABC наибольшая из высот AH равна медиане BM. Докажите, что угол ABC не больше 60 градусов.
б) В остроугольном треугольнике ABC высота AH равна медиане BM и равна биссектрисе CD. Докажите, что треугольник ABC правильный.

7) Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a > 0$, $b > 0$. Докажите, что $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Занятие 2 09.04.06 по неравенствам. Группа Стали.

1) Докажите, что в выпуклый четырехугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса $\frac{S}{P}$.

2) Дан выпуклый многоугольник, в который нельзя поместить никакой треугольник площади 1. Докажите, что этот многоугольник можно поместить в треугольник площади 4.

3) В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD, медиана BM и высота CH пересекаются в одной точке. Доказать, что угол BAC больше 45 градусов.

4) Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше $\sqrt{2}$.

5) Выпуклый четырехугольник $ABCD$ разрезан своими диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что если радиусы всех четырех окружностей, вписанных в эти треугольники, равны между собой, то четырехугольник $ABCD$ — ромб.

6) В тетраэдре $ABCD$ ребро AC перпендикулярно BC, а AD перпендикулярно BD. Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше чем $\frac{CD}{AB}$.

7) На прямой взяты четыре различные точки, обозначенные в порядке следования буквами A, B, C, D. Докажите, что для любой точки E, не лежащей на прямой AD, справедливо неравенство:

$$AE + ED + |AB - CD| > BE + CE.$$

8) Канал имеет форму двух полуполос ширины 1. Плот какого максимального диаметра может проплыть поворот? (Плот может быть изогнутым).