Фигуры постоянной ширины

Все объекты находятся в трехмерном (или, если хочется — даже в двумерном...) пространстве. Желающие могут проверить, что в более, чем трехмерном пространстве все совершенно аналогично.

Каждую точку пространства $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ мы всегда воспринимаем также как ее радиус-вектор. Поэтому для любых точек a, b определены такие понятия, как $a + b$, $2a$, $-3a + 5b$ и т.д.

Определение 1. *Суммой Минковского* множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $A + B = \{a + b : \ a \in A, b \in B\}$. Обычно сокращают: $A + x = A + \{x\}$, $A - x = A + \{-x\}$.

Упражнение 1. Сумма Минковского выпуклых тел выпукла; при этом граничная точка c суммы есть сумма граничных $c = a + b$, и опорная плоскость в c параллельна опорным плоскостям в точках a и b.

Определение 2. *Геометрическая разность* множеств B и A есть максимальное (по включению) множество X такое, что $X + A \subset B$. Иными словами, $B \stackrel{*}{-} A = \{x : A + x \subset B\}$.

Упражнение 2. Геометрическая разность выпуклых множеств выпукла. Если B_d — шар радиуса d с центром в нуле, то $B_d + a$ — шар с центром в a, $B_d + B_r = B_{d+r}$, $B_d \stackrel{*}{-} B_r = B_{d-r}$. Как выглядит сумма квадрата и правильного треугольника, одна из сторон которого параллельна стороне квадрата? А их геометрическая разность?

Упражнение 3. Докажите, что для произвольного множества C верна формула $B \stackrel{*}{-} C = \cap_{c \in -C}(B + c)$.

Определение 3. Выпуклое множество называется *множеством постоянной ширины* d, если расстояние между любыми двумя его параллельными опорными плоскостями равно d.

Формула. Пусть A — множество диаметра d, $B = B_d$ — шар радиуса d с центром в нуле. Тогда

$$\boxed{K = \frac{(B \stackrel{*}{-} (-A)) + (B \stackrel{*}{-} (B \stackrel{*}{-} A))}{2}}$$

есть множество постоянной ширины d, содержащее A.

Давайте разбираться...

Пусть $X = B \stackrel{*}{-} (-A)$, $Y = B \stackrel{*}{-} (B \stackrel{*}{-} A)$. Давайте для начала выясним их геометрический смысл.

Задача 4. X есть множество центров шаров радиуса d, содержащих A.

Задача 5. $Y = \cap_{x \in X}(B + x)$. Иначе говоря, Y есть множество всех точек, отстоящих от любой точки множества X не более, чем на d.

Задача 6. $A \subset Y \subset X$.

Задача 7 (необязательная, но полезная). Пусть L — множество постоянной ширины d, содержащее A. Докажите, что а) $L \subset X$; б) $Y \subset L$.

Зафиксируем направление; будем называть его “вверх”. Пусть v — вектор длины d, направленный вверх.

Задача 8. Пусть y — верхняя точка множества Y. Докажите, что $Y - y \subset B - v$ в размерности а) 2; б) 3. (**Указание.** Воспользоваться задачей 5.)

Задача 9. Докажите Формулу.

Задача 10. Докажите, что множество постоянной ширины d, содержащее A, единственно тогда и только тогда, когда $X = Y$.